77. Вычисления с корнями

77.1. Вычислить $(1+\sqrt{2})^3$. (Ответ должен быть в форме $a+b\sqrt{2}$ с целыми a и b.)

77.2. Тот же вопрос для $(1-\sqrt{2})^3$.

77.3. Число $(1+\sqrt{3})^3+(1-\sqrt{3})^3$ — целое. Найти его.

77.4. Тот же вопрос для $(1+\sqrt{3})^3\cdot(1-\sqrt{3})^3$.

77.5. Вычислить $(2-\sqrt{3})^7(2+\sqrt{3})^7$.

77.6. Даны два числа α и β. Известно, что сумма $\alpha+\beta$ и произведение $\alpha\beta$ — целые числа. Доказать, что число $\alpha^n+\beta^n$ будет целым при всех $n=1,2,3\ldots$.

77.7. Доказать, что число $(2+\sqrt{3})^7+(2-\sqrt{3})^7$ — целое, и найти его.

77.8. Найти рациональные числа a и b, при которых $1/(\sqrt{2}-1)=a+b\sqrt{2}$.

77.9. Найти рациональные числа a и b, при которых $1/(5+2\sqrt{3})=a+b\sqrt{3}$.

77.10. Найти рациональные a и b, при которых $1/(\sqrt{5}-\sqrt{2})=a\sqrt{2}+b\sqrt{5}$.

* * *

77.11. Доказать, что любое число представимо в виде $a+b\sqrt{2}$ (с рациональными a и b) не более чем одним способом.

77.12. Найти рациональные a, b, c, d, для которых $1/(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})=a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6}$.

77.13. Найти рациональные a, b, c, при которых $1/(1+\sqrt[3]{2})=a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}$.

77.14. Найти α^2, α^4, α^8 при $\alpha=\sqrt{2}-1$. (Ответ должен быть в форме $a+b\sqrt{2}$ с целыми a и b.)

77.15. Доказать, что при некотором целом $n\neq 0$ число $n\sqrt{2}$ отстоит от ближайшего целого числа не более чем на 0,01.

77.16. Известно, что $(1+\sqrt{2})^k=m+n\sqrt{2}$ для целых m и n. Доказать, что $m^2-2n^2=\pm 1$.

77.17. Доказать, что уравнение $m^2-2n^2=1$ имеет бесконечно много решений в целых числах.

77.18. Доказать, что уравнение $m^2-3n^2=1$ имеет бесконечно много решений в целых числах.

77.19. Число $\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ — целое. Найти его.