78. Компле́ксные числа

Комплексные числа — формальные записи вида $a + bi$, где a и b — вещественные, а i называют мнимой единицей, полагая $i^2 = -1$. Эти числа можно складывать и умножать (раскрыв скобки и приведя подобные слагаемые).

78.1. Вычислить $(2 + 3i) + (7 - i)$, $(2 + 3i)(7 - i)$, $(1 + i)(1 - i)$ и $(2 - 3i)(3 + 2i)$, $2(4 + 3i) - 3(2 - i)$

78.2. Вычислить $(-i)^2$, i^{10}.

78.3. Вычислить $(1 + i)^{10}$ и $(1 - i)^{10}$.

78.4. Найти $(1 + i)^{101}$.

78.5. Найти два комплексных числа, сумма и произведение которых равны 2.

78.6. Найти x, для которого $x(1+i) = 1$. (Здесь и далее буква x обозначает комплексное число.)

78.7. Найти x, при котором $x(2 + 3i) = 3 - 2i$.

78.8. Найти x, при котором $x(1 + i) = 3 + 4i$.

* * *

78.9. Найти x, при котором $x(2 + 3i) = 5 + 4i$. (Указание. Можно искать x в виде $a + bi$ и составить систему из двух уравнений с неизвестными a и b.)

78.10. Найти сумму $1 + i + i^2 + i^3 + \ldots + i^{100}$.

78.11. Вычислить $(\sqrt{3} + i)^{30}$.

78.12. Найти x, для которого $x^2 = 2$; найти x, для которого $x^2 = -2$; найти x, для которого $x^2 = 2i$.

78.13. Найти x, для которого $x^2 = 1 + i$.

78.14. Найти x, для которого $x^2 + 2x + 2 = 0$.

78.15. Найти все $x = a + bi$, для которых $x^3 = 1$

Многие из этих задач впоследствии можно будеть решить с использованием формул для деления или тригонометрической формы комплексного числа — но пока что их вполне можно решать и «кустарно».

В задачах 78.3 и 78.4 можно сначала возвести в квадрат. В задаче 78.7 ответ легко угадать: $(-i)$. В задаче 78.11 сначала стоит вычислить $(\sqrt{3} + i)^3$.