153. Лекции в весеннем семестре 1997/8 года

1. Теорема Эйлера.

2. Проективная геометрия: двойное отношение

3. Проективная геометрия (продолжение)

4. Непланарные графы

5. Гармонический ряд и бесконечность множества простых чисел

6. Экстремальные задачи

Задача о минимальном пути света у зеркала. Принцип Ферма.

Система стремится в положение с минимальной энергией: шар в ямке.

Груз на пружине (сумма энергии тяготения и энергии пружины, вывод формулы $F = -kx$ из соображений энергии).

Физическое решение задачи о минимальном пути.

Преломление: разные скорости света, по-прежнему кратчайший путь. Закон Снеллиуса. Вывод его переходом к другой физической задаче с тем же математическим смыслом (грузы)

7. Построение квадратных корней циркулем и линейкой

8. Экстремальные задачи (продолжение)

Разные решения задачи $XA + XB + XC \to \min$:

а. Три грузика — равновесие сил.

б. Общий принцип: минимум останется минимумом, если ограничить допустимые вариации. Пример: нижняя часть цепи симметрична, даже если точки подвеса на разной высоте. Другой пример: отражение в двух зеркалах.

в. Задача при фиксированном AX: отражение света в окружности. Другое доказательство равенства всех углов.

г. Решение с поворотом на $120°$.

д. Мыльная плёнка, натянутая на три стержня (демонстрация)

е. Задача $XA + XB + XC + XD \to \min$ — решение не даёт ответа к физической задаче о мыльной плёнке.

ж. Другое математическое решение: взяв точку X, для которой углы равны $120°$, соединим её с точками A, B и C и проведём через точки A, B, C прямые, перпендикудярные XA, XB и XC. Они будут сторонами правильного треугольника. Для любой другой точки X' сумма расстояний от X' до сторон этого треугольника будет той же, что и для X, а сумма расстояний до точек A, B, C будет больше.

9. Дроби Фарея

10. Эллипс

11. Последовательность Фибоначчи

12. Парабола

13. Checkers

Неосуществлённые планы:

игры и стратегии

что есть изоморфизм

Ещё об экстремальных задачах:

Задача о минимальном пути света у зеркала. Принцип Ферма. Геометрическое и механическое решение.

Преломление света, закон Снеллиуса. Вывод его переходом к другой физической задаче с тем же математическим смыслом (грузы)

Задача о минимальной сумме расстояний до вершин треугольника, её математическое (с помощью поворота) и физическое решение. Физическое решение обобщается на грузы разных весов (в отличие от решения с поворотом).

Два зеркала. Оптимальное решение состоит из оптимальных частей. Другой пример: почему тяжёлая цепь симметрична, даже если точки подвеса на разной высоте.

Снова о сумме расстояний: новое решение с помощью кругового зеркала.

Изопериметрическая задача. Частные случаи: прямоугольник, треугольник.

Шарнирный четырёхугольник с заданными сторонами - почему площадь максимальна, когда он вписанный (как это следует из общего утверждения) - и обратный переход.

Доказательство Штейнера (симметризация и увеличение угла до прямого)

почему нельзя удвоить куб циркулем и линейкой

линии уровня на картах, пики-впадины-перевалы, формула Эйлера для этого

равновеликие многоугольники равносоставлены

классические парадоксы (лжеца, Берри, etc.)

формулы для приближённых вычислений (типа $\sqrt{1+x}$, $\sin x \approx x - x^3/6$

бесконечные ряды - безосновательные преобразования, Ахиллес и черепаха etc.

неравенства

теория вероятностей — математическое ожидание, игла Бюффона?