154. Формула Эйлера

У многоугольников бывают углы (вершины) и стороны — и их поровну. У многогранников можно считать вершины, рёбра (отрезки, соединяющие вершины) и грани (многоугольники, ограниченные рёбрами) — получатся уже три числа, которые мы будем обознаяать В, Р и Г. Например, куб имеет восемь вершин (В $=8$), шесть квадратных граней (Г $=6$) и двенадцать рёбер (Р $=12$). Для многогранников ни одно из чисел В, Г и Р не определяет остальных двух, но соотношение между ними есть, и оно называется «формулой Эйлера». Эту формулу легко отгадать, глядя на таблицу:

многогранник	**В**	**Р**	**Г**
куб	8	12	6
n-угольная призма	$2n$	$3n$	$n+2$
тетраэдр	4	6	4
n-угольная пирамида	$n+1$	$2n$	$n+1$

Формула Эйлера: для любого многогранника В $-$ Р $+$ Г $=2$.

Заметим, что мы не давали точного определения многогранников, вершин, рёбер и граней. Это не так просто, и при широком толковании этих понятий формула может не выполняться (например, если приклеить маленький кубик к центру грани большого куба так, чтобы получилась кольцевая грань). Заведомо формула верна для *выпуклых многогранников*, которые лежат по одну сторону от любой своей грани. Другой способ объяснить, что такое выпуклый многогранник: если разрезать пространство плоскостями на части, то те из частей, которые не уходят в бесконечность, будут выпуклыми многогранниками.

Пример: куб — выпуклый многогранник, но если мы вырежем из одной из его граней маленькую пирамидку, то он перестанет быть выпуклым. (Вопрос: а останется ли куб выпуклым, если не вырезать, а пристроить пирамидку?)

Мы не будем давать строгого доказательства формулы Эйлера, но попытаемся объяснить, почему она верна для выпуклых многогранников.

Проектирование многогранника на плоскость. Посмотрим на многогранник из точки, которая находится вне его вблизи середины одной из его граней. Если эта грань непрозрачна, то она заслонит все другие грани и мы увидим просто многоугольник. Если она прозрачна, то на фотографии получится большой многоугольник, разбитый на меньшие (остальные грани, снятые изнутри). (Упражнение: нарисовать, что получится для тетраэдра и куба.)

Нам надо доказать, что для полученной системы многоугольников В $-$ Р $+$ Г $=1$ (мы не учитываем прозрачную грань).

Затопление граней. Будем считать, что плоскость вне фигуры покрыта водой, и залить фигуру воде мешают рёбра, играющие роль дамб. Эти дамбы мы будем убирать, и в конце концов сухих участков не будет. Найдём ребро, отделяющее сушу от воды (если суша ещё есть), и удалим его. При этом число вершин не изменится, число рёбер уменьшится на 1 и число граней уменьшится на 1, так как вода зальет одну из граней. Следовательно, число Эйлера В$+$Г$-$Р не изменится. Что получится, когда сухих участков не останется? Останутся вершины, соединённые дамбами, по обе стороны которых вода. Получившаяся сеть рёбер обладает такими свойствами:

- В ней нет циклов (замкнутых путей, составленных из различных рёбер), поскольку теперь всё залито водой, а внутрь цикла вода проникнуть не может.

- Она состоит из одного куска (из любой вершины можно пройти в любую по рёбрам). В самом деле, удаляемая дамба отделяет сушу от воды, поэтому из одного её конца в другой можно пройти, обходя сухой участок с другой стороны. Значит, удаление дамбы не нарушает связности.

Удаление рёбер. Осталось доказать, что в любой связной сети рёбер без циклов число рёбер на единицу меньше числа вершин. Мы сделаем это, постепенно удаляя по одному ребру и одной вершине, пока рёбра не кончатся. При этом сеть будет оставаться связной, поэтому в конце будет только одна вершина.

Пусть рёбра ещё есть. Тогда есть вершина, в которую ведёт только одно ребро. (Если это не так, и в каждую вершину ведёт больше одного ребра, то можно гулять по сети, выходя из вершины не по тому ребру, по которому мы пришли — и рано или поздно получится цикл.)

Уберем эту вершину вместе с ведущим в неё ребром. Сеть останется связной (удалённая вершина была тупиковой), и хотя бы одна вершина останется (например, второй конец выкинутого ребра). Ясно также, что циклов не появится — ведь мы только убираем рёбра.

В конце концов останется связная сеть без рёбер, то есть одна точка. При этом мы удалили равное число рёбер и вершин, так что до этого число вершин было на 1 больше числа рёбер.

Тем самым мы завершили доказательство (точнее, пояснение — многие моменты нашего рассуждения требуют более строгого обоснования) формулы Эйлера.