155. Проективные преобразования

Мы уже рассматривали *движения* и *преобразования подобия*. Часто бывают полезны и другие, более сложные преобразования. Сейчас мы рассмотрим так называемые «проективные преобразования».

Пусть на плоскости даны две прямые a и b и прямая l. *Параллельное проектирование прямой a на прямую b вдоль прямой l* происходит так (рис. 155.1): чтобы найти, куда перейдёт какая-то точка A прямой a, мы проводим через A прямую, параллельную l, и берём точку B, в которой эта прямая пересекает прямую b (предполагается. что направление проектирования l не параллельно ни одной из прямых a и b).

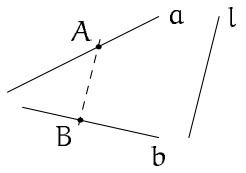

Рис. 1

Можно представлять себе, что точка A отбрасывает на прямую b тень, когда Солнце светит параллельно прямой l (Солнце далеко, и лучи можно считать параллельными).

Параллельное проектирование не сохраняет расстояния (если a и b не параллельны). Однако *отношение* расстояний сохраняется — именно это утверждает обобщённая теорема Фалеса; поэтому параллельное проектирование является преобразованием подобия.

Аналогичным образом можно определить параллельное проектирование одной плоскости на другую вдоль прямой: на плоском стекле нарисована картинка; её образ — тень на плоском столе. (Вопрос: можно ли при это утверждать, что отношения расстояний сохраняются?)

Теперь предположим, что источник света не так далеко (например, лампочка). Тогда лучи не параллельны, а исходят из одной точки. Соответствующее преобразование называется *центральным проектированием*. Дадим формальное определение (для случая прямой). Пусть заданы прямые a и b и точка O, не лежащая ни на одной из прямых (*центр проектирования*). Образ точки A на прямой a — это точка пересечения прямой OA с прямой b (рис. 155.2).

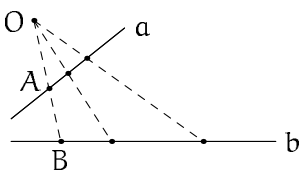

Рис. 2

Упражнение: какая точка не имеет образа? какая точка не имеет прообраза? (Этих исключений можно избежать, если рассматривать так называемые «бесконечно удалённые» точки.)

При центральном проектировании не сохраняются ни расстояния, ни их отношения (что хорошо видно на рисунке). Однако некоторая сохраняющаяся величина есть — это двойное отношение. *Двойным отношением* четырёх точек A, B, C и D на прямой называется число

$$[A, B, C, D] = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}.$$

Утверждение. При центральном проектировании двойное отношение сохраняется.

Доказательство. Пусть четыре луча a, b, c, d пересекают некоторую прямую в точках A, B, C, D (рис. 155.3).

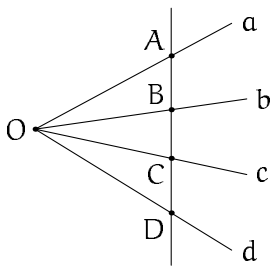

Рис. 3

Мы покажем, что

$$[A, B, C, D] = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{\sin(a, c)}{\sin(b, c)} : \frac{\sin(a, d)}{\sin(b, d)},$$

где через (a, b) обозначается угол между лучами a и b и т. п. Таким образом, двойное отношение определяется углами между лучами и потому не меняется при проектировании. Как убедиться в справедливости этого равества? Прежде всего перейдём от длин отрезков $AB, AC \ldots$ к площадям треугольников $OAB, OAC, \ldots$ (высота у этих треугольников общая, так что отношение площадей равно отношению оснований). Затем площадь каждого треугольника запишем как половину произведения сторон и синуса угла между ними (площадь треугольника OAB равна $OA \cdot OB \cdot \sin(a, b)$ и т, п,) Остаётся заметить, что каждый отрезок OA, OB, OC и OD входит в выражение для двойного отношения дважды (один раз в числителе, другой — в знаменателе) и потому сокращается.

Вот пример использования двойного отношения в (довольно трудной) геометрической задаче.

Задача. Пусть в окружности проведена хорда AB, а через её середину O проведены хорды CD и EF. Пусть P и Q — точки пересечения CF и ED с хордой AB. Доказать, что $OP = OQ$ (рис. 155.4).

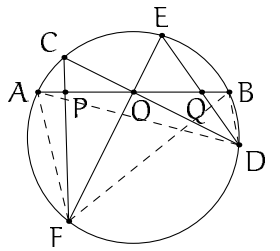

Рис. 4

Решение. На окружности имеются четыре точки A, C, E, B. Будем смотреть на них из точек F и D; в силу свойства вписанных углов, опирающихся на одну и ту же дугу, дуги AC, CE и EB видны из точек F и D под одинаковыми углами, поэтому двойные отношения (выражающиеся через синусы этих углов) одинаковы. Но при взгляде из точки F мы получаем двойное отношение $[A, P, O, B]$, а при взгляде из точки D — двойное отношение $[A, O, Q, B]$. Значит,

$$[A, P, O, B] = [A, O, Q, B],$$

Запишем эти двойные отношения, обозначив каждую из половин хорды AB за a, а расстояния OP и OQ зв x и y:

$$\frac{a}{x} : \frac{2a}{a+x} = \frac{a+y}{y} : \frac{2a}{a}$$

Отсюда

$$(a+x)y = (a+y)x$$

и, значит, $x = y$.

Корректное определение двойного отношения требует учёта порядка точек и соответственного выбора знака. Мы сознательно не вдаёмся в это, чтобы не усложнять и так непростой материал. Но сильным школьникам можно на это намекнуть — пусть подумают.