156. Проективные и дробно-линейные преобразования

Рассмотрим центральное проектирование одной прямой на другую. Введём на обеих прямых координаты. При проектировании точка с координатой x на первой прямой переходит в точку с координатой x' на второй. Как связаны x и y? Оказывается, ответ даётся формулой дробной-линейного преобразования:

$$x' = \frac{ax+b}{cx+d}$$

Здесь a, b, c, d — некоторые числа, зависящие от выбора прямых, систем координат на них и от точки проектирования.

Есть несколько способов получить эту формулу. Во-первых, можно воспользоваться уже известным нам фактом о сохранении двойных отношений. Рассмотрим три произвольные точки P, Q и R на первой прямой. Пусть p, q и r — их координаты, а p', q', и r' — координаты их образов. Если x' — координата проекции точки с координатой x, то можно записать равенство двойных отношений:

$$\frac{r-p}{r-q} : \frac{x-p}{x-q} = \frac{r'-p'}{r'-q'} : \frac{x'-p'}{x'-q'}$$

Отсюда можно выразить x' через x и получить требуемую формулу. вида $x' = (ax+b)/(cx+d)$. Мы не приводим соответствующие выкладки, а вместо этого объясним, почему выражение x' через x будет дробно-линейным. Легко видеть, что двойные отношения, стоящие слева и справа, являются дробно-линейными функциями от x и x', так что равенство двойных отношений можно переписать как

$$\frac{kx+l}{mx+n} = \frac{px'+q}{rx'+s}$$

Здесь k, l, m, n, p, q, r, s — некоторые фиксированные числа. Таким образом, выражение x' через x есть композиция дробно-линейной функции в левой части и функции, обратной к дробно-линейной функции правой части. Остаётся заметить, что функция обратная к дробно-линейной, сама дробно-линейна, и что композиция двух дробно-линейных функций также дробно-линейна.

Тот факт, что проективное преобразование прямой задаётся дробной-линейной формулой, можно объяснить и без двойных отношений. Приведём два таких объяснения.

(Первый вариант.) Заметим, что выбор координаты на прямой не однозначен: можно менять начало отсчёта, направление отсчёта и единичный отрезок. (Вопрос: а что происходит при этом с координатой точки?) Легко проверить, что если преобразование при одном выборе координат будет дробно-линейным, то оно останется таким и при любом другом выборе координат.

Выберем координаты так, чтобы начала координат находились в точке P пересечения прямых, а единичные отрезки были одинаковыми (рис. 156.1).

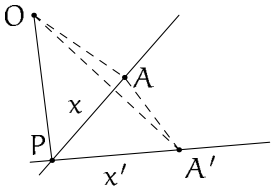

Рис.1

Нужно выяснить, при каком соотношении между длинами x и x' отрезков PA и PA' точки O (центр проектирования), A и A' лежат на одной прямой. Это условие можно записать так: площадь треугольника OAA' равна 0, то есть разность площадей треугольников POA' и POA равна площади треугольника AOA'. Первая из указанных площадей пропорационально x, вторая пропорциональна x', а третья — произведению xx'. Получается уравнение вида $px - qx' = rxx'$, которое определяет x' как дробно-линейную функцию от x.

(Второй вариант.) Введём на плоскости прямоугольную систему координат. Не ограничивая общности, можно считать, что центр проектирования — начало координат и что мы проектируем на прямую $x = 1$. При этом точка (a, b) проектируется. очевидно, в точку $(1, b/a)$. Прямая, которая проектируется, может быть выбрана произвольным образом, и система координат на ней тоже произвольна. Представим себе точку, движущуюся по первой прямой; в момент t она находится в точке с координатой t (измеряемой вдоль первой прямой). Тогда в прямоугольной системе координат движущаяся точка будет иметь координаты $(at+b, ct+d)$. где a, b, c, d — некоторые константы (обе проекции движутся равномерно). Её образ имеет ординату $(ct + d)/(at + b)$ — то есть его координата есть дробно-линейная функция от координаты проектируемой точки.

Первое из трёх приведённых рассуждений показывает, кстати, что проективное преобразование полностью задаётся образами трёх различных точек.

Если мы знаем, что проективное преобразование дробно-линейно, то отсюда можно вывести, что оно сохраняет двойное отношение, проведя вычисление. (Можно также заметить, что дробно-лиинейное преобразование есть композиция линейных и функций вида $x \mapsto 1/x$, и что все они сохраняют двойные отношения.