157. Непланарные графы

Назовем граф *планарным*, если его можно нарисовать на плоскости без самопересечений. При этом вершины изображаются точками, рёбра — отрезками кривых (без самопересечений), и при этом рёбра не должны пересекать друг друга.

Вопрос: (а) граф изображён на плоскости с самопересечениями. Может ли он быть планарным? (б) Планарен ли граф, образованный вершинами и рёбрами тетраэдра? (в) Граф можно изобразить без самопересечений на сфере. Будет ли он планарным? (г) Тот же вопрос для тора (поверхности бублика).

Доказанная нами теорема Эйлера допускает такое обобщение: если граф можно вложить в плоскость, то для него $В - Р + Г = 2$, где В, Р и Г — количества его вершин, рёбер и граней. Здесь под гранями подразумеваются все области, на которые граф разбивает плоскость, включая и «внешнюю грань». Доказательство остаётся тем же самым, только первый шаг (проектирование многогранника на плоскость) теперь не требуется.

Используя эту теорему, докажем непланарность двух графов: полного пятивершинника (пять вершин, любая пара вершин соединена ребром) и графа «три дома, три колодца». Последний состоит из двух троек вершин и девяти рёбер, соединяющих каждую вершину из первой тройки с каждой вершиной из второй.

(Название появилось из такой задачи: в деревне есть три дома и три колодца. Каждый хозяин дома хочет иметь тропинку от своего дома до каждого из трех колодцев, но, поскольку соседей терпеть не может, не хочет, чтобы его тропинки пересекались с чужими. Задача эта не имеет решения — соответствующий граф не планарен).

Докажем, что указанные два графа не планарны. Начнём с полного пятивершинника. Пусть он как-либо размещён на плоскости. Ясно, что числа вершин и рёбер не зависят от способа размещения, а определяются самим графом. Про грани это не так ясно, но теорема Эйлера однозначно определяет их число: $Г = Р - В + 2 = 10 - 5 + 2 = 7$. С другой стороны, поскольку у грани не менее трех рёбер (в графе нет двух рёбер, соединяющих одну и ту же пару вершин), а ребро разделяет ровно две грани, то $3Г \leqslant 2Р$, следовательно, $Г \leqslant 10 \cdot 2/3 < 7$. Противоречие.

Для доказательства второго утверждения заметим, что если граф «три дома, три колодца» и планарен, то у него заведомо нет треугольных граней. Действительно, среди вершин такой грани должны быть либо два дома, либо два колодца, соединенные ребром, чего в графе нет. Раз у каждой грани как минимум четыре ребра, то число рёбер должно быть по крайней мене вдвое больше числа граней (аналогично предыдущему). Но $Г = Р - В + 2 = 9 - 6 + 2 = 5$, а рёбер только девять. Следовательно, граф не планарен.