158. Теорема Дезарга

Одно применение двойного отношения (решение задачи о бабочке) мы уже рассмотрели. Другое применение — это теорема Дезарга.

Теорема Дезарга. Пусть прямые a, b и c либо пересекаются в одной точке, либо параллельны. Возьмём на прямой a произвольные точки A и A', на прямой b — точки B и B', на прямой c — точки C и C'. Пусть O_1, O_2 и O_3 — точки пересечения AB и $A'B'$, BC и $B'C'$, CA и $C'A'$ соответственно (предполагая, что указанные прямые не параллельны). Тогда точки O_1, O_2 и O_3 лежат на одной прямой.

Доказательство для случая параллельных прямых (рис. 158.1) совсем просто.

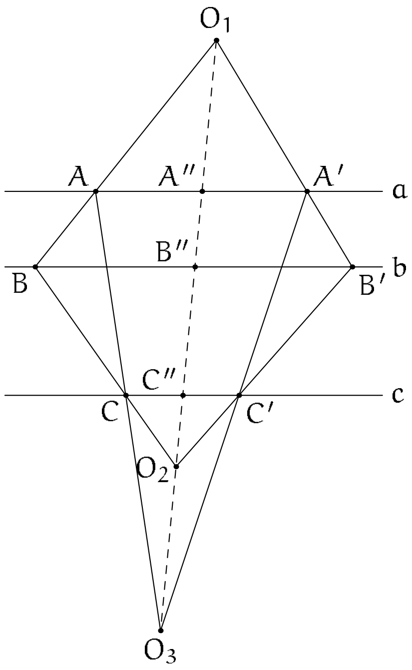

Рис. 1

Гомотетия с центром O_1 и подходящим коэффициентом переводит отрезок AA' в отрезок BB', гомотетия с центром O_2 переводит BB' в CC'. Композиция этих гомотетий также является гомотетией, и её центр лежит на прямой O_1O_2 (см. задачу 73.7). С другой стороны, эта гомотетия переводит AA' в CC' и потому её центр есть точка O_3 (центр должен лежать на AC и $A'C'$).

Приведём ещё одно, более «школьное», решение. Проведём прямую O_1O_2. Пусть она пересекает прямые a, b и c в точках A'', B'' и C'' соответственно. Из подобия треугольников получаем

$$\frac{AA''}{A''A'} = \frac{BB''}{B''B'} \quad \text{и} \quad \frac{BB''}{B''B'} = \frac{CC''}{C''C'}.$$

Следовательно, $AA''/A''A' = CC''/C''C'$, поэтому точка O_3 лежит на прямой $A''C''$ (формальное рассуждение: если мы проведём прямую O_3A'', то точка её пересечения с прямой c будет делить отрезок CC' в том же отношении, что и C'', и поэтому совпадёт с C''). Но по построению точки O_1 и O_2 также лежат на прямой $A''C''$, и всё доказано.

В случае, когда прямые не параллельны, а пересекаются в одной точке, ни одно из этих решений не проходит (гомотетии не существуют, отношения не сохраняются). Однако рассуждение с отношениями можно приспособить и к этому случаю, только нужно рассматривать двойные отношения.

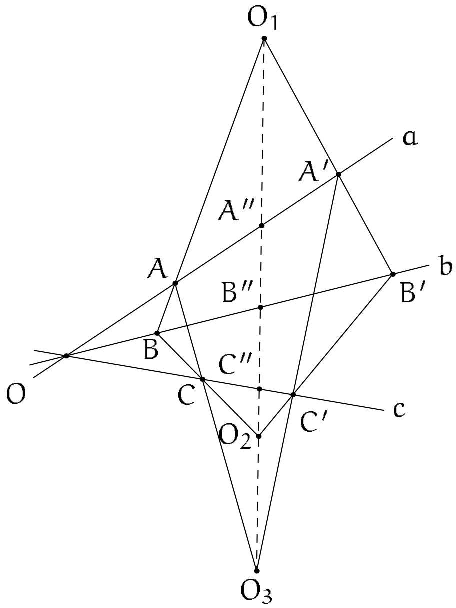

Рис. 2

Пусть O — точка пересечения прямых a, b и c (рис. 158.2). Используя введённые обозначения, мы можем записать равенства

$$[O, A, A'', A'] = [O, B, B'', B'] \quad \text{и} \quad [O, B, B'', B'] = [O, C, C'', C'],$$

поскольку центральное проектирование сохраняет двойные отношения. Отсюда следует, что $[O, A, A'', A'] = [O, C, C'', C']$. Далее можно рассуждать так же, как и для случая параллельных прямых, поскольку отношения OA/OA' и OC/OC' фиксированы, так что из равенства двойных отношений будет следовать равенство обычных. Именно, если мы проведём прямую O_3A'' и обозначим через P точку её пересечения с c, то $[O, A, A'', A'] = [O, C, P, C']$, откуда $[O, C, C'', C'] = [O, C, P, C']$. Сокращая в последнем равенстве равные отрезки, получим, что C'' и P делят отрезок CC' в одном и том же отношении.

Другое доказательство (или хотя бы объяснение) теоремы Дезарга для случая пересекающихся прямых можно получить, воспользовавшись законами перспективы. Представим себе, что рис. 158.1 нарисован на земле (a и c — края дороги, b — разделительная линия, делящая дорогу на две неравные полосы). Пусть мы стоим на дороге и смотрим справа налево; сфотографируем то, что мы видим. На фотографии прямые a, b и c сходятся в некоторой точке O горизонта (рис. 158.2, повёрнутый на 90° по часовой стрелке). Поскольку точки O_1, O_2 и O_3 лежали на одной прямой на местности, их изображения на фотографии также будут лежать на одной прямой, и фотография будет представлять собой конфигурацию Дезарга для случая пересекающихся прямых.

Наконец, ещё одно доказательство теоремы Дезарга для пересекающихся прямых также использует стереометрические соображения. Представим себе, что над столом расположено наклонное стекло, на котором нарисованы три прямые, образующие треугольник ABC.

Этот рисунок освещают сверху лампой, и треугольник отбрасывает тень $A'B'C'$ на стол (рис. 158.3).

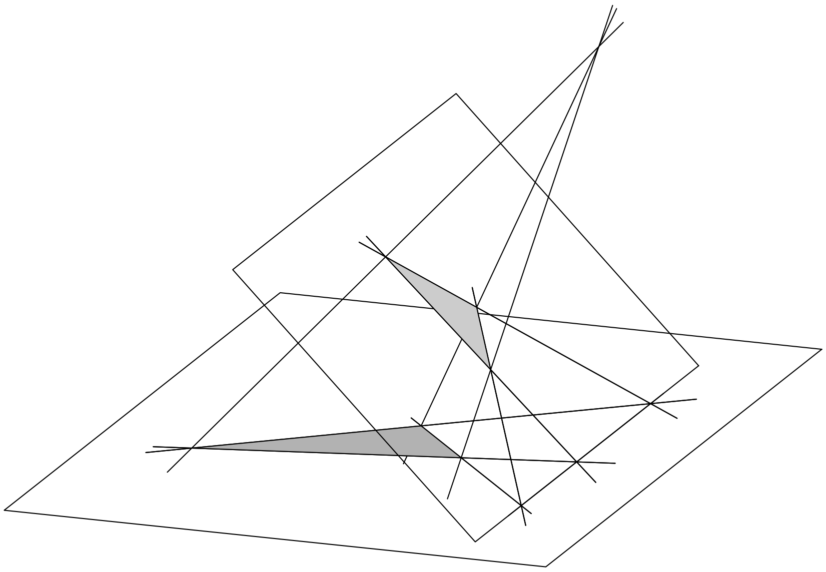

Рис. 3

Если забыть про стекло и стол, а смотреть только на прямые, тени и траектории лучей, то получится как раз конфигурация из теоремы Дезарга, и три точки, о которых идёт речь в этой теореме, лежат на прямой (линии пересечении стекла и стола).

В заключение рассмотрим ещё одно применение проектирования. Речь будет идти о построениях одной линейкой (без помощи циркуля). Пусть на плоскости даны две параллельные прямые, и на одной из них отмечен отрезок. Как при помощи линейки разделить этот отрезок пополам? (Указание: используйте замечательное свойство трапеции.)

Предположим теперь, что второй прямой нет, а имеется лишь одна прямая и отрезок на ней (или, если угодно, просто две точки — провести через них прямую мы и сами сможем). Оказывается, в такой ситуации середину отрезка построить невозможно. Попробуем объяснить, почему.

Пусть кто-то придумал такое построение. Спроектируем центрально нашу плоскость на другую, так чтобы исходная прямая не была параллельна своему образу (можно считать, что мы рисуем всё на стекле, и, освещая рисунок лампочкой, смотрим, что видно на стене). Тогда на второй плоскости будет осуществлено то же построение, поскольку прямые переходят в прямые, а точки их пересечения — в точки пересечения. Но при центральной проекции середина отрезка не переходит в середину, если только прямые не параллельны. Следовательно, на второй плоскости наше построение даёт неверный результат — и тем самым построение годится не всегда.

Как и ранее, строгие рассуждения с использованием двойного отношения должны использовать его знак. (Можно попытаться это объяснить для интересующихся.)

«Трёхмерное» доказательство требует некоторого пространственного воображения и простейших знаний (например, что две плоскости пересекаются по прямой); тем не менее оно достаточно забавно, и его стоит рассказать.

В продолжение разговора о построении середины отрезка можно сказать, что центр окружности нельзя построить одной линейкой, поскольку при центральной проекции окружность может перейти в окружность, а центр — не в центр. Однако почему такая проекция возможна, объяснить трудно (можно рассмотреть наклонный конус над кругом и понять, что подбирая наклон секущей его плоскости, можно найти второе положение, при котором сечение будет кругом, то есть полуоси эллипса-сечения будут равны).