159. Бесконечность множества простых чисел

Доказать, что простых чисел бесконечно много, можно многими способами. Здесь мы рассмотрим один из них, не самый короткий, но поучительный.

Начнём издалека и напишем две суммы:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^{n}}$$

и

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}.$$

Лемма. (а) Первая сумма не превосходит 2 для любого натурального n. (б) Вторая сумма может быть сколь угодно большой: для любого числа M можно найти такое n, что $1+1/2+\ldots+1/n>M$.

Первое утверждение доказать совсем просто: проходя участок в два километра, мы сначала проходим полпути (1 км), потом половину оставшейся части пути (1/2 км), потом половину нового расстояния до цели (1/4 км) и т. д.

Докажем теперь второе утверждение. Сгруппируем члены нашего ряда:

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^{l-1}+1}+\ldots+\frac{1}{2^{l}}\right)$$

(n-я скобка содержит 2^n членов, кончая $1/2^{n+1}$; единица стоит особняком. При такой группировке каждая скобка не меньше 1/2: она содержит 2^n слагаемых, и каждое из них не меньше $1/2^{n+1}$. Следовательно, взяв достаточно много скобок, мы сможем превзойти любое число.

Лемма доказана.

Сделаем ещё одно очевидное замечание: поскольку сумма $1+1/2+1/4+\ldots+1/2^n$ не превосходит 2, это же верно и для суммы $1+1/p+1/p^2+\ldots+1/p^n$ при любом натуральном p, большем единицы.

Теперь мы можем доказать, что простых чисел бесконечно много. Предположим, что это не так; пусть $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — простые числа и других простых чисел нет. Рассмотрим тогда произведение

$$P=\left(1+\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_1^2}+\ldots\right)\cdot\left(1+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_2^2}+\ldots\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{p_k}+\frac{1}{p_k^2}+\ldots\right)$$

(сколько слагаемых в каждой скобке, мы скажем позже). Поскольку сумма чисел в каждой скобке не превышает 2, всё произведение не превосходит 2^k. С другой стороны, мы можем раскрыть скобки, и получится сумма вида

$$1+\frac{1}{p_1}+\ldots+\frac{1}{p_k}+\frac{1}{p_1p_2}+\ldots$$

Все слагаемые будут дробями, числители которых равны 1, а в знаменателях стоят произведения простых чисел в каких-то степенях. Каждое число, как известно, можно разложить на простые множители, поэтому среди знаменателей может оказаться любое целое положительное число (важно только, чтобы суммы в скобках не были оборваны слишком рано, до появления нужных степеней). Поэтому, взяв достаточно много членов в каждой скобке, можно сделать произведение P сколь угодно большим — но, с другой стороны, каждый сомножитель не превосходит 2 и потому произведение не может быть больше 2^k. Здесь k — количество различных простых чисел, которое (по нашему предположению, ныне приведённому к абсурду) конечно.

(Конец доказательства бесконечности множества простых чисел.)

Это доказательство заведомо не является самым простым и коротким — рассуждение с числом $p_1p_2\ldots p_k+1$ значительно понятнее. Однако про него можно ещё не раз будет вспомнить по самым разным поводам (тождество Эйлера для мультипликативных функций, оценки частиных сумм рядов, расходимость ряда из обратрых простых чисел и т. п.).

Заметим, что всё рассуждение аккуратно обходит бесконечные суммы (которых формально ещё не было). Можно также обратить внимание школьников на то, что мы используем лишь одну из частей основной теоремы арифметики — существование разложения на простые (но не его единственность).

Хорошее упражнение — доказать, что сумма $1+\frac{1}{2^s}+\ldots+\frac{1}{n^s}$ остаётся ограниченной, если $s>1$ (можно использовать ту же группировку слагаемых, что и для гармонического ряда).