160. Формулы для рекуррентных последовательностей

Числами Фибоначчи называются числа $1, 1, 2, 3, 5, 8\ldots$ (два первых числа равны единице, а каждое следующее равно сумме двух предыдущих). Мы хотим найти формулу для этих чисел. Нам будет удобно называть *последовательностью Фибоначчи* любую последовательность чисел $\{a_n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, для которой $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ при всех n (а не только конкретную последовательность, составленную из чисел Фибоначчи).

Отметим несколько простых свойств:

- Если все члены последовательности Фибоначчи умножить на одно и то же число, то опять получится последовательность Фибоначчи.
- Если сложить почленно две последовательности Фибоначчи, то результат будет последовательностью Фибоначчи.
- Чтобы задать последовательность Фибоначчи, достаточно указать два её первых члена.

Первые два свойства легко проверить. Например, если $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — две последовательности Фибоначчи, а $c_n = a_n + b_n$ — их сумма, то

$$c_{n+2} = a_{n+2} + b_{n+2} = (a_{n+1} + a_n) + (b_{n+1} + b_n) = (a_{n+1} + b_{n+1}) + (a_n + b_n) = c_{n+1} + c_n.$$

Третье свойство столь же очевидно: два первых члена определяют третий, второй и третий определяют четвёртый и т. д.

Наиболее неожиданный шаг в выводе формулы для чисел Фибоначчи состоит в следующем: *попытаемся найти среди последовательностей Фибоначчи геометрические прогресии*, то есть последовательности вида $a_n = au^n$. Если $a = 0$ или $u = 0$, то все члены последовательности (кроме, быть может, нулевого) — нули; такие последовательности нам не интересны.

Для последовательности $a_n = au^n$ рекуррентное соотношение имеет вид

$$au^{n+2} = au^{n+1} + au^n.$$

Поскольку мы договорились, что $a \neq 0$ и $u \neq 0$, на общий множитель au^n можно разделить, и получится

$$u^2 = u + 1.$$

Это квадратное уравнение имеет два корня:

$$u_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad u_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Итак, есть ровно две геометрические прогрессии (с точностью до постоянного множителя), которые являются последовательностями Фибоначчи. Любая их «линейная комбинация», то есть любая последовательность вида

$$a_n = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

($_1$ и c_2 — произвольные числа) также будет последовательностью Фибоначчи.

Оказывается, что любую последовательность Фибоначчи можно задать такой формулой — нужно лишь правильно подобрать c_1 и c_2. Мы покажем это на примере последовательности с $a_1 = 1$, $a_2 = 2$. Достаточно найти c_1 и c_2, для которых первые два члена будут правильные. Подставляя выражения для a_1 и a_2, получим систему

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 1 \\ c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) &= 1. \end{aligned}$$

Решая её, получим, что $c_1 = 1/\sqrt{5}$, $c_2 = -1/\sqrt{5}$. Поэтому окончательная формула для последовательности $1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$ такова:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

Упражнения.

1. Найдите формулу для последовательности с рекуррентным соотношением $a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3a_n$ и условием $a_0 = 1$, $a_1 = 2$.

2. То же для соотношения $a_{n+2} = a_n$ (a_0 и a_1 те же).

3. То же для соотношения $a_{n+2} = -a_n$.

4. То же для соотношения $a_{n+2} = 2a_{n+1} - 1$.

Объяснить, откуда берётся идея искать именно геометрические прогрессии, вряд ли можно — пусть это лучше останется без комментариев. Второе и третье упражнения можно решить безо всякой теории. Последнее упражнение — трудное: вряд ли школьники догадаются до формулы присоединённых векторов. Тем не менее сильным школьникам полезно об этом подумать — а ответ можно потом рассказать.