161. Построения циркулем и линейкой

Для начала покажем, как с помощью циркуля и линейки можно выполнять арифметические действия.

Если даны два отрезка a и b, то легко построить их сумму и разность — достаточно отложить их от одной точки на прямой в разные стороны (тогда получится сумма) или в одну (разность). Построить произведение несколько сложнее. Для начала заметим, что сама задача предполагает, что задан единичный отрезок. Теперь построение произведения ясно из картинки (рис. 161.1):

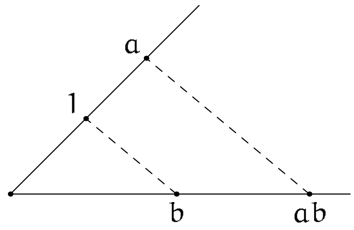

Рис. 1

Похожим способом можно построить отрезок $1/a$ (на одной прямой нужно отложить единичный отрезок, а не другой — отрезки 1 и a). Следовательно, мы умеем строить и отношение отрезков: $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$. (Упражнение: как построить отрезок ab/c, не имея единичного отрезка?)

Наконец, ещё одна операция — построение отрезка $\sqrt{a}$, если дан отрезок a. Для этого нужно построить отрезок $a+1$, на нём как на диаметре построить окружность и провести перпендикуляр к диаметру из точки, которая делит диаметр на отрезки 1 и a (рис. 161.2). Тогда отрезок этого перпендикуляра, находящийся внутри полукруга, будет равен $\sqrt{a}$ (высота в прямоугольном треугольнике есть среднее геометрическое отрезков, на которые она делит гипотенузу).

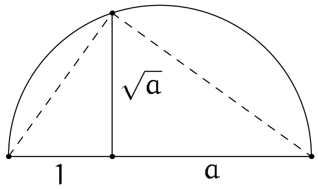

Рис. 2

Теперь мы уже можем выполнить довольно сложные построения. Покажем, например, как построить правильный пятиугольник. Для этого достаточно построить угол в $72^\circ = 360^\circ/5$, для чего достаточно (выбрав произвольный отрезок за единичный) построить отрезок длиной $\cos 72^\circ$.

Формулу для $\cos 72^\circ$ можно получить, например, так: $2 \cdot 72^\circ = 360^\circ - 3 \cdot 72^\circ$, поэтому $\cos(2\cdot 72^\circ) = \cos(3\cdot 72^\circ)$. Учитывая формулы $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$, $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$, получим

$$2\cos^2 72^\circ - 1 = 4\cos^3 72^\circ - 3\cos 72^\circ.$$

Обозначая $u = \cos 72^\circ$, получим кубическое уравнение $4u^3 - 2u^2 - 3u + 1 = 0$. Это уравнение имеет 3 корня: 1 и $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$; легко видеть, что $\cos 72^\circ = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

Видно, что все операции в этой формуле соответствуют построениям, которые мы можем выполнить.

На самом деле ничего другого (кроме сложения, вычитания, умножения и деления, а также извлечения квадратного корня) с помощью циркуля и линейки сделать нельзя. Объясним это более формально. Для этого фиксируем некоторую систему координат. Построение начинается с некоторой начальной конфигурации (точек, прямых, окружностей). Все эти объекты (в выбранной системе координат) задаются числами, которые мы будем (несколько вольно) называть координатами этих объектов. Именно, точка задаётся двумя координатами (абсциссой и ординатой), прямая — тоже двумя (места пересечений с осями координат), окружность — тремя (координатами центра и радиусом). Координаты объектов начальной конфигурации называть *исходными*. В результате построения мы получим некоторые новые объекты; их координаты мы будем называть *результирующими*.

Утверждение. Результирующие числа могут быть получены из исходных чисел и единицы с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения квадратного корня.

Доказательство. Будем называть число *хорошим*, если его можно получить из исходных с помощью перечисленных операций. Нам надо доказать, что все результирующие числа — хорошие. Для этого рассмотрим все возможные операции при построении и показать, что каждая из них даёт объект с хорошими координатами, если применяется к объектам с хорошими координатами.

Какие элементарные действия разрешены при построениях циркулем и линейкой? Вот они:

- построение окружности с данным центром и радиусом, равным данному отрезку;
- построение прямой, проходящей через две данные точки;
- отыскание точки пересечения двух прямых;
- отыскание точек пересечения прямой и окружности;
- отыскание точек пересечения двух окружностей.

Для начала заметим, что если у концов отрезка все координаты — хорошие числа, то его длина — тоже хорошее число (так как равна $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$). Поэтому построение окружности (с центром в данной точке и радиусом, равным заданному отрезку) даёт окружность с хорошими координатами.

Далее, уравнение прямой с координатами a и b (то есть прямой, проходящшей через точку $(a,0)$ на оси абсцисс и точку $(0,b)$ на оси ординат), имеет вид

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

Поэтому прямая с хорошими координатами задаётся уравнением, все коэффициенты которого хорошие. Легко видеть, что верно и обратное: если коэффициенты уравнения прямой $ax+by+c=0$ хорошие, то и её координаты (координаты точек пересечения с осями) будут хорошими. Таким образом, надо убедиться, что прямую. проходящую через две точки с хорошими координатами, можно задать уравнением с хорошими кожэффициентами. Это ясно, поскольку угловой коэффициент такой прямой и свободный член получаются из линейных уравнений.

Следующее построение — отыскание точки пересечения двух прямых — сводится к решению системы двух линейных уравнений; при решении ничего, кроме арифметических операций, не требуется (даже корень извлекать не надо).

Пересекая прямую с окружностью, получаем систему

$$\begin{aligned} ax + by + c &= 0, \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 &= r^2. \end{aligned}$$

Выражая из первого уравнения x через y и подставляя во второе, мы получим для y квадратное уравнение с хорошими коэффициентами. Корни такого уравнения — хорошие числа, так как формула для корней включает только разрешённые операции. Значит, y будет хорошим, а тогда $x = -(by + c)/a$ тоже будет хорошим.

Наконец, для двух окружностей получаем систему

$$\begin{aligned} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 &= r^2. \\ (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 &= r_1^2. \end{aligned}$$

Если вычесть из первого уравнения второе, то x^2 и y^2 соскратятся, и мы получим систему из квадратного и линейного уравнения, как и в предыдущем случае.

Итак, можно построить лишь объекты с хорошими координатами. Поэтому, например, знаменитая задача об удвоении единичного куба (т. е. о построении числа $\sqrt[3]{2}$) неразрешима с помощью циркуля и линейки (впрочем, доказать, что число $\sqrt[3]{2}$ не является хорошим, не так просто).

Замечание. На самом деле наше рассуждение содержит существенннный пробел: дело в том, что во многих построениях говорится «возьмём произвольную точка на таком-то отрезке» (или «проведём окружность произвольного радиуса»). Большой беды, однако, в этом нет: если нужна произвольная точка на отрезке, то можно взять точку с хорошими координатами (скажем, проведя прямую с рациональными координатами, пересекающую этот отрезок, и взяв точку пересечения).

Последнее замечание, да и вообще уточнение определения построения (например, можно ли разриешать условные переходы или циклы?) — дело тонкое, и в подробности, вероятно, вдаваться не стоит.