162. Дроби Фарея

Напишем для начала дроби $0/1$ и $1/1$:

$$\frac{0}{1} \quad \frac{1}{1}$$

Затем вставим между этими двумя дробями третью, сложив отдельно числители знаменатели этих дробей ($0 + 1 = 1$, $1 + 1 = 2$)Ж

$$\frac{0}{1} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{1}$$

Теперь проделаем это же с каждой парой соседних дробей (получатся дроби $(0+1)/(1+2) = 1/3$ и $(1 + 1)/(2 + 1) = 2/3$):

$$\frac{0}{1} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{1}{1}$$

Теорема. При неограниченном повторении этой процедуры каждая несократимая правильная (лежащая между 0 и 1) дробь будут написана, причём ровно один раз.

Сейчас мы это докажем. Для начала заметим, что каждая новая дробь лежит между теми двумя, из которых она получилась. Неформальное объяснение такое: если у a школьников было b шоколадок (по b/a шоколадок на школьника), а у других c школьников — d шоколадок (по d/c на каждого), то при встрече на $a + c$ школьников придётся $b + d$ шоколадок (по $(a + c)/(b + d)$ на человека). [Школьники ведь тоже люди. — Прим. составит.] При этом одна компания от этого выиграет, а другая проиграет, то есть дробь $(a + c_/(b + d)$ будет между двумя другими дробями.

А вот формальное объяснение: если $a/b < c/d$, то

$$\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} = \frac{(a+c)b - a(b+d)}{b(b+d)} = \frac{bc - ad}{b(b+d)} > 0,$$

(неравенство $bc - ad > 0$ получается из $a/b < c/d$ умножением на bd). Аналогично доказывается, что $(a+c)/(b+d) < c/d$. Итак, при наших действиях сохраняется правильный порядок дробей — они всегда написаны по возрастанию.

Покажем, что все получающиеся дроби несократимы. Будем называть дроби a/b и c/d (считаем, что $a/b < c/d$) *соседними*, если $bc - ad = 1$.

Лемма. Если a/b и c/d — соседние дроби, то a/b и $(a + c)/(b + d)$ соседние и $(a + c)/(b + d)$ и c/d соседние (между двумя соседями становится третий).

Это легко проверить простым вычислением:

$$(a + c)b - a(b + d) = bc - ad = 1 \quad \text{и} \quad c(b + d) - (a + c)d = bc - ad = 1.$$

Таким образом, в каждый момент описаннной в теореме процедуры любые две рядом стоящие дроби будут соседними — это очевидно следует из леммы (начальные дроби $0/1$ и $1/1$, конечно, были соседними).

Заметим, что если две дроби являются соседними, то каждая из них несократима. Действительно, если, например, a и b имеют общий делитель d, то $bc - ad$ делится на d, а это невозможно, так как $bc - ad = 1$. Поэтому все дроби, которые у нас получаются, несократимы.

Наконец, докажем, что любая несократимая дробь когда-нибудь появится. Для этого воспользуемся таким соображением: если дробь p/q лежит между соседними дробями a/b и c/d, то $q \geq b+d$. (Другими словами, чтобы разделить две соседние дроби, нужна дробь с большим знаменателем: наименьший знаменатель будет у дроби, получающейся раздельным сложением числителей и знаменателей.)

В этом легко убедиться. В самом деле, дробь p/q делит отрезок между a/b и c/d на две части, длины которых оцениваются снизу так:

$$\frac{p}{q} - \frac{a}{b} = \frac{pb - qa}{bd} \geq \frac{1}{bq} \quad \text{и} \quad \frac{c}{d} - \frac{p}{q} = \frac{cq - dp}{dq} \geq \frac{1}{dq}$$

Но сумма этих длин есть $1/bd$ — разность между a/b и c/d. Значит, $1/(bq) + 1/(dq) \leqslant 1/(bd)$, откуда $q \geq b + d$.

Теперь мы можем завершить доказательство теоремы. На каждом шаге отрезок $[0, 1]$ разбит на несколько участков уже выписанными дробями. Для каждого участка подсчитаем сумму знаменателей дробей-концов. Когда участок разбивается на два, для каждой из частей эта сумма увеличится. Значит, после n шагов описанной в теореме процедуры получатся участки с суммой n или больше.

Если (несократимая) дробь p/q при этом ещё не появилась, то она лежит на одном из участков, и в этом случае, как мы видели, сумма знаменателей концов этого участка не может быть больше q, и потому $n \leqslant q$. Таким образом, после n-го шага появятся все несократимые дроби со знаменателями меньше n. Теорема доказана.

Этот материал довольно формален, но подобные рассуждения пригодятся в будущем — например, когда речь пойдёт об алгебраических числах и их приближениях рациональными.

[Что-то я этого не понял. Не лучше ли здесь написать то, что говорил Фок про комплексную плоскость и окружности?]