163. Эллипс

Вобьём два гвоздя и накинем на них петлю с некоторым запасом; вставив в петлю карандащ и прочертим кривую, держа петлю натянутой. Эта кривая называется эллипсом.

Определение. Пусть даны две точки F_1 и F_2 и расстояние l. *Эллипсом* называется геометрическое место точек A таких, что $AF_1 + AF_2 = l$. F_1 и F_2 называются фокусами эллипса.

Вопрос: где находятся фокусы и чему равно расстояние l для эллипса, полученного с помощью гвоздей и петли?

Сегодня мы рассмотрим такое свойство эллипса: касательная к нему образует (в точке касания) равные углы с направлениями на фокусы (рис. 163.1).

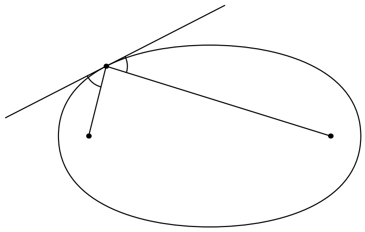

Рис. 1

Мы докажем этот факт (точнее, поясним его, так как точного определения касательной мы давать не будем) разными способами.

Первый способ: сравнение скоростей. Начнём со следующего вопроса. Пусть у нас есть две точки: движущаяся X и неподвижная O. С какой скоростью движущаяся точка удаляется от неподвижной? Ответ зависит не только от скорости точки X (которую мы будем обозначать v), но и от направления, в котором она движется. Одно дело, если X удаляется от O по прямой (тогда расстояние OX увеличивается со скоростью v). другое — если X движется по окружности с центром в O (тогда расстояние не меняется). В общем случае, как объясняют в курсе механики, расстояние OX увеличивается со скоростью $v\cos\alpha$, где α — угол между направлением скорости v и направлением OX (рис. 163.2).

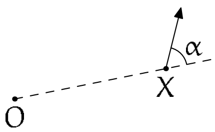

Рис. 2

Объяснить это правило можно так. Пусть за небольшой промежуток времени точка X сместилась в положение X'. Отложим на отрезке OX' расстояние OU, равное OX (рис. 163.3).

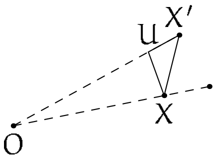

Рис. 3

Нам надо доказать, что расстояния UX' и XX' отличаются примерно в $\cos\alpha$ раз (разница тем меньше, чем меньше отрезок XX'). Треугольник OUX — равнобедренный с малым углом при вершине, поэтому углы при его основании почти что прямые. Значит, треугольник UXX' близок к прямоугольному, а угол $UX'X$ близок к α, так как угол между прямыми OX и OX' мал, поэтому $UX'/XX' \approx \cos\alpha$.

Используем этот факт для доказательства свойства касательной к эллипсу. Пусть точка движется по эллипсу. При этом её скорость направлена по касательной. Заметим, что расстояние до первого фокуса увеличивается с той же скоростью, с которой уменьшается расстояние до второго (поскольку сумма расстояний постоянна). Значит, косинусы углов α и β (рис.163.4) равны по величине и противоположны по знаку, и потому эти углы дополняют друг друга до 180°, что и требовалось доказать.

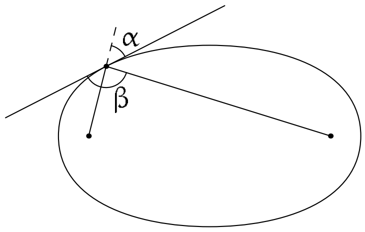

Рис. 4

Второй способ: принцип Ферма Где отразится луч, выпущенный из первого фокуса и попавший во второй? Согласно принципу Ферма, он отразится так, чтобы время пути было (локально) минимальным. Но для эллипса, где ни отражайся, пройденное расстояние одно и то же. Поэтому лучу всё равно где отражаться. Значит, луч, вышедший из первого фокуса в любую сторону, попадёт во второй после отражения.

Так как мы знаем, что угол падения равен углу отражения, теперь ясно, что касательная образует с направлениями на фокусы равные углы.

Это рассуждение, вероятно, убедительно скорее для физиков. К нему можно добавить и интерпретацию в терминах волновой оптики: если в одном из фокусов эллипса размещён источник монохроматического света, то по всем путям до другого фокуса сдвиг фаз (определяемый суммой расстояний до и после отражения) будет один и тот же, поэтому во втором фокусе лучи будут усиливать друг друга при интерференции.

Третий способ: отражение от прямой Это рассуждение, пожалуй, легче всего сделать строгим. Оно исходит из следующих двух (достаточно очевидных) фактов. (1) Эллипс делит плоскость на две части: для точек A внутри эллипса сумма расстояний до фокусов меньше l, для точек вне эллипса — больше. (2) Касательная имеет единственную общую точку с эллипсом; остальные её точки лежат вне элллипса.

Если принять эти два факта, то дальше рассуждение таково. Пусть в точке касания A угол падения не равен углу отражения. Тогда, как известно, на касательной прямой найдётся точка B, для которой сумма расстояний до фокусов должна быть меньше, чем для A Но мы согласились, что такие точки лежат внутри эллипса, а точки касательной — снаружи.

Эллипс как сечение цилиндра

Элиипс встречается в жизни довольно часто: например, разрезав ножом свечку, мы получим в сечении эллипс. Почему? Есть красивое доказательство этого («шары Данделена»).

Пусть цилиндр рассечён некоторой плоскостью. Поместим в цилиндр два шара, диаметр которых равен диаметру цилиндра, так, чтобы они касались плоскости с двух сторон (при этом они будут касаться и цилиндра, конечно). Обозначим точки касания с плоскостью F_1 и F_2 (рис. 163.5).

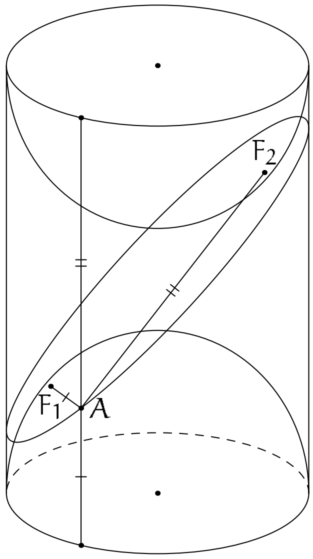

Рис. 5

Как известно, все касательные, проведённые из данной точки к данному шару, равны. Рассмотрим точку A на границе сечения. Одна касательная из неё к первому шару очевидна, это AF_1. Вторую проведём по образующей цилиндра. Они равны. Сделав аналогичную операцию со вторым шаром, мы получим, что расстояние от точки A до первого фокуса равно расстоянию по образующей до окружности касания первого шара, а до второго фокуса — расстоянию по образующей до окружности касания второго шара. Но сумма этих расстояний нам известна! Это расстояние между центрами шаров, и оно одно и то же для всех точек A. Таким образом, граница сечения есть эллипс, фокусами которого будут точки F_1 и F_2, а параметр l равен расстоянию между центрами шаров.

Эллипс как растянутый круг. Если нарисовать на резиновой плёнке круг, а потом растянуть плёнку вдоль какой-то прямой, получится эллипс. Почему? На самом деле мы это уже доказали. Если разрезать цилиндр перпендикулярно оси, получится круг, а если под углом — то эллипс. Проекция вдоль оси цилиндра устанавливает оответствие между точками круга и эллипса. При этой проекции расстояния вдоль одного направления не меняются, а вдоль перпендикулярного направления меняются в постоянное число раз, то есть как раз происходит растяжение в одном направлении.

Рассуждение про принцип Ферма довольно спорно, но вроде бы школьники в него верят ...

На самом деле при параллельной проекции одной плоскости на другую эллипс переходит в эллипс (и при центральной тоже — если только не получится парабола или гипербола) — но это уже объяснить не так просто.