164. Парабола

Нарисуем несколько эллипсов, у которых один из фокусов будет общим (точка F_1 на рис. 164.1), а второй фокус будем сдвигать всё выше и выше (точки фокусов отмечены — кроме трёх последних, которые не поместились на рисунке). При этом мы считаем, что все эллипсы проходят через одну и ту же точку O, которая находится под F_1.

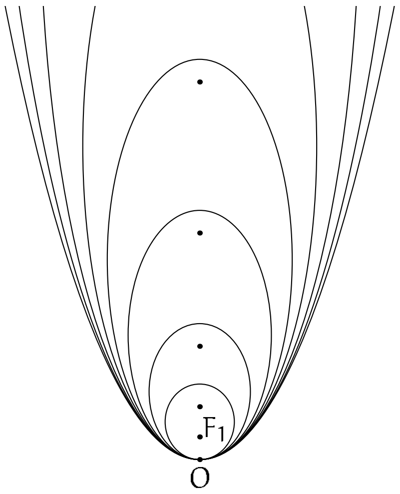

Рис. 1

Видно, что при удалении второго фокуса эллипсы приближаются к некоторой кривой. Её можно было бы назвать «эллипсом с одним из фокусов в бесконечности». На самом деле эта кривая называется *параболой* и имеет простое описание: геометрическое место точек, равноудалённых от данной точки и данной прямой. Сейчас мы объясним, почему.

Нарисуем эллипс, у которого фокус F_2 далеко вверху (рис. 164.2).

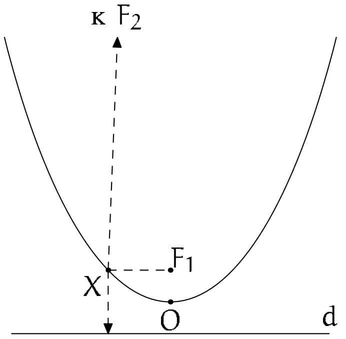

Рис. 2

Представим себе точку X, которая по нему движется. Сумма расстояний от X до F_1 и F_2 остаётся неизменной, поэтому насколько точка отдалилась от F_1, настолько она приблизилась к F_2. Но фокус F_2 далеко вверху, поэтому изменение расстояния до F_2 — это просто изменение вертикальной координаты. Так что можно сказать и так: точка X сдвинулась вверх на столько же, на сколько отдалилась от точки F_1.

Нарисуем теперь горизонтальную прямую d так, чтобы точка O была равноудалена от F_1 и от этой прямой. Сдвиг точки X вверх можно понимать как изменение расстояния до прямой d. Поэтому можно сказать так: при движении точки X по эллипсу с далёким фокусом расстояния от X до F_1 и d увеличиваются одинаково. Но для точки O они были равны. Значит, они равны и для всех точек эллипса с бесконечно удалённым фокусом.

Определение. Параболой с *фокусом* F и *директрисой* d называется геометрическое место точек B, одинаково удалённых от точки F и от прямой d.

Уравнение параболы. Всем известно, что парабола — это график квадратного трёхчлена. Не противоречит ли это нашему определению? Сейчас мы увидим, что нет, найдя для графика квадратного трёхчлена фокус и директрису. Достаточно рассматривать график $y = ax^2$ (график $y = ax^2 + bx + c$ получается из него сдвигом). Нетрудно догадаться, что директриса будет горизонтальна, а фокус лежать на оси ординат, надо только понять, где. Пусть фокус имеет ординату f. Тогда директриса состоит из точек с ординатой $-f$. Запишем условие, говорящее, что точка $\rangle x, y\rangle$ одинаково удалена от точки $\langle 0, f\rangle$ и от прямой с ординатой $-f$:

$$x^2 + (y - f)^2 = (y + f)^2$$

(мы записали квадраты расстояний). Раскрывая скобки и сокращая равные члены, получает уравнение $x^2 = 4fy$. Таким образом, если положить $f = a/4$, то парабола будет иметь уравнение $y = ax^2$, что и требовалось.

Оптическое свойство параболы. Мы уже знаем, что луч света, исходящий из фокуса эллипса, после отражения попадает в другой фокус. Если этот второй фокус бесконечно удалён вверх, то луч будет идти вертикально вверх. Получаем такое свойство параболы: лучи, выходящие из её фокуса, после отражения образуют параллельный пучок.

Если бы Алексей Толстой лучше знал геометрию, то он понимал бы, что гиперболоид инженера Гарина на самом деле должен иметь форму параболоида (получаться вращением параболы вокруг вертикальной оси). (А если бы он лучше знал физику, то понимал бы, что весь проект обречён на неудачу без использования нетепловых источников света.)

Путь света обратим, поэтому можно сказать и так: параллельные лучи, параллельные оси параболы (перпендикулярные директрисе), после отражения собираются в фокусе. Архимед, как говорит легенда, использовал знание свойств параболы (точнее, параболоида) и организовал пожар римского флота, попросив воинов пустить зайчик своими зеркально блестящими щитами в одно и то же место римского корабля. Эта легенда имеет два слабых места. Во-первых, трудно представить себе, чтобы щиты были такие ровные и блестящие, чтобы давать качественный зайчик (в боях они, вероятно, гнутся и царапаются). Во-вторых, непонятно, зачем Архимеду (и тем более воинам) знать свойства параболы: всё равно каждый из них не прикладывает щит к незримому параболоиду, а просто пускает зайчик в предписанное командованием место.

Более достоверна история о телескопе Роберта Вуда (известного физика-экспериментатора): налив ртуть в медленно вращающийся сосуд, он получил блестящую поверхность параболической формы, которую использовал в качестве зеркала телескопа. (Как мы видели, именно параболическое, а не сферическое, зеркало способно сфокусировать параллельный пучок лучей строго в одной точке. Для сферического зеркала получится не точка, а маленькое пятнышко; это явление называют сферической аберрацией.)

Касательная к параболе. Оптическое свойство параболы можно сформулировать и так: касательная к параболе является биссектрисой угла между направлениями к фокусу и к директрисе (рис, 164.3).

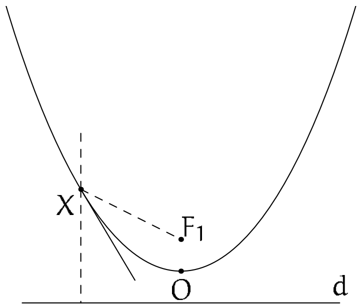

Рис. 3

В самом деле, угол падения есть угол между касательной и направлением на фокус, а угол отражения равен углу между касательной и вертикалью (ведь отражённый луч идёт вертикально вверх).

Это свойство можно объяснить и механически. Пусть по параболе движется точка со скоростью ν, приближаясь к директрисе и фокусу. Её вектор скорости направлен по касательной к параболе. Тогда скорость приближения к директрисе равна $\nu \cos \alpha$, где α есть угол между касательной и вертикалью, а скорость приближения к фокусу есть $\nu \cos \beta$, где β — угол между касательной и направлением на фокус. Расстояния до фокуса и директрисы равны, скорости их изменения тоже равны, значит, $\nu \cos \alpha = \nu \cos \beta$, откуда $\alpha = \beta$.

Задача. На координатной плоскости была нарисована парабола $y = x^2$, после чего оси координат стёрли. Восстановить их, а также единичный отрезок.

Указание. Возьмём пучок параллельных прямых, пересекающих параболу. Тогда середины их хорд лежат на прямой, и эта прямая параллельна оси параболы. Это можно проверить в координатах. Правдоподобное объяснение без вычислений: середины параллельных хорд круга лежат на прямой; если круг бесконечно растянуть в одном направлении, получится парабола, а прямая середин хорд станет почти параллельной к направлению растяжений. Зная направление оси, можно провести перпендикулярную ей хорду; её середина лежит на оси ординат. После этого легко найти вершину параболы и ось абсцисс. Чтобы найти единичный отрезок, проведём биссектрису координатного угла до пересечения с параболой.

Некоторым школьникам была предложена задача: найти геометрическое место точек, из которых две касательные к параболе пересекаются под прямым углом. (Ответ: директриса.) (Максим: можно ли это усмотреть юез вычислений)