165. Контрольная по материалу изложений

165.1. В многограннике все грани — треугольники. Сколько вершин в этом многограннике, если известно, что в нём n рёбер?

165.2. Дана окружность и точка внутри неё. Найти геометрическое место точек внутри окружности, для которых расстояние от заданной точки равно расстоянию от заданной окружности.

165.3. Даны отрезки a, b и c. Как построить циркулем и линейкой отрезок, равный $\sqrt{a^2 + bc}$?

165.4. Может ли произведение

$$\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2}\dots\right)\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{9^2}\dots\right)\cdot\ldots\cdot\left(1 + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{(p^2)^2}\dots\right)$$

быть больше 100 (разрешается писать сколько угодно членов в каждой скобке и сколько угодно скобок с различными простыми числами)?

165.5. Можно ли нарисовать на плоскости полный граф с шестью вершинами (каждая вершина соединена с каждой) (a) без самопересечений; (b) с одним самопересечением (какие-то два ребра могут пересекаться)?

165.6. Можно ли построить циркулем и линейкой (a) правильный 10-угольник; (b) правильный 15-угольник?

165.7. Найти геометрическое место точек, для которых расстояние от данной прямой на 1 больше расстояния от данной точки.

165.8. Написать рекуррентное соотношение типа $a_{n+2} = \alpha a_n + \beta a_{n+1}$, у которого все решения имели бы вид $c_1 2^n + c_2 3^n$.

165.9. При центральной проекции одной прямой на другую отрезок AB отображается в отрезок CD, и середина первого отрезка переходит в середину второго. Следует ли отсюда, что точка, делящая первый отрезок в отношении $1:2$, переходит в точку, делящую второй отрезок в отношении $1:2$?

165.10. Точка X доставляет минимум выражения $3AX + 4BX + 5CX$ для данных трёх точек A, B, C и не совпадает ни с одной из этих точек. Найти углы между лучами XA, XB и XC (требуется ответ с разумными объяснениями).

165.11. Футбольный мяч склеен из пятиугольников и шестиугольников, в каждой вершине сходятся по три куска. Сколько пятиугольников использовано?

165.12. Рейку разделили на 7 равных частей и точки деления пометили красным. Затем её разделили на 13 равных частей и точки деления пометили синим. Затем её распилили на 20 равных частей. Доказать, что на всех кусочках, кроме двух крайних, будет ровно по одной пометке (синей или красной).

165.13. Известно, что последовательность $\{a_n\}$ есть сумма двух геометрических прогрессий и $a_1 = 7$, $a_2 = 15$, $a_3 = 115$, $a_4 = 495$. Найдите a_5.

165.14. Двойное отношение четырёх точек равно α. Указать, какие могут получиться двойные отношения, если взять те же самые точки в другом порядке.

165.15. Можно ли построить точку пересечения медиан в треугольнике с помощью одной линейки?

165.16. Вывести закон сообщающихся сосудов (почему в двух коленах U-образной трубки одинаковый уровень жидкости) из принципа минимума потенциальной энергии.