166. Угадай размерность: предисловие к листку

Грубо говоря, размерность множества — это количество чисел (параметров), которые необходимо указать, чтобы определить точку множества. Параметры эти играют ту же роль, что и координаты на плоскости или в пространстве. При этом среди каждый набор параметров должен соответствовать только одной точке, и все наборы должны быть «использованы».

На самом деле ситуация здесь более деликатная, чем, скажем, с координатами на плоскости. Рассмотрим, например, обычные географические координаты на сфере (поверхности Земли) — широту и долготу. Во-первых, широта и долгота бывают не любые (широта — от -90° до $+90^\circ$, а долгота — от 0° до 360°). Во вторых, есть точки, в которых такие координаты не определены. (Вопрос: что это за точки?)

Подобные трудности можно обойти, если сказать, что координаты определены не на всём множестве, а на какой-то его части, и принимают не любые значения, а, скажем, только положительные или только от 0 до 1. Мы не будем сейчас подробно обсуждать этот вопрос.

Часто множества задаются в пространстве уравнениями. При этом пространство может быть не обязательно трёхмерным, а любой размерности. Такое пространство можно представлять себе как множество наборов чисел некоторой длины n, которые являются координатами в пространстве. Если подмножество пространства задано какими-то уравнениями, может оказаться, что некоторые координаты выражаются через другие. В таких случаях число параметров может оказаться меньше, чем число координат.

Пример. Точка на параболе $y = x^2$ задаётся только x-координатой. Точка на окружности $x^2 + y^2 = 1$ не всегда задаётся x-координатой однозначно, но если мы знаем, что y-координата положительна, то всё в порядке.

Рассмотрим простейший пример — когда множество задано *системой однородных линейных уравнений* вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Утверждение. Если $m < n$ (то есть уравнений меньше, чем неизвестных), то такая система всегда имеет ненулевое решение. Более того, размерность множества решений не меньше $n - m$.

Вопрос. Как доказать это, когда $n = 1$ (т. е. уравнение всего одно)?

Доказательство основано на исключении неизвестных. Если в первом уравнении есть ненулевой коэффициент, то одну из неизвестных (ту самую, при которой коэффициент ненулевой) можно выразить через остальные. Подставив это выражение в остальные уравнения, мы получим систему $m-1$ уравнений с $n-1$ неизвестной. Сделаем с ней ту же операцию и т. д. В результате мы выразим некоторые из неизвестных (не более m штук) через остальные, которые могут принимать любые значения (и называются обычно *свободными*). Любой набор значений свободных неизвестных однозначно определяет решение системы. Поскольку их не менее $n - m$ штук, размерность пространства решений не меньше, чем $n - m$.

То же самое можно сказать и по-другому. Множество решений системы не меняется, если к одному уравнению добавить другое, умноженное на число (почему?). Если в первом уравнении есть ненулевой коэффициент при переменной x_i, то, вычитая его из остальных с подходящими коэффициентами, можно добиться того, чтобы остальные уравнения не содержали x_i. Затем поступим так же со вторым уравнением, с третьим и т. д. После обработки всех уравнений система примет вид (после перенумерации неизвестных)

$$\begin{cases} a_{11}+ \qquad\qquad a_{1,k+1}x_k + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ \quad a_{22}x_2+ \qquad\qquad a_{2,k+1}x_k + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \qquad\qquad\qquad \ldots \\ \qquad\qquad a_{kk}x_k + a_{k,k+1}x_k + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

(Возможно, что последние уравнения окажутся нулевыми; у всех ненулевых уравнений $a_{ii} \neq 0$.) Видно, что неизвестные x_k, ..., x_n могут принимать любые значения, а остальные через них выражаются.

Если уравнения нелинейные, то аналогичное утверждение тоже верно, но с многочисленными оговорками.

Пример. На плоскости уравнение $x^2+y^2=1$ задаёт одномерную окружность, уравнение $x^2+y^2=0$ — одну точку (множество размерности нуль), а уравнение $x^2+y^2=-1$ — вообще пустое множество.

Никаких общих утверждений мы формулировать не будем. Ваша задача при решении листочка — не приводить строгие доказательства, а получить (и разумно объяснить) правильный ответ.

В приводимом далее списке указаны *размерности* некоторых семейств. (Грубо говоря, размерность — это число действительных параметров, определяющих объект.) Дополните этот список (пользуясь аналогиями и здравым смыслом).

Точки (данной) прямой 1
Точки плоскости 2
Точки пространства 3
Отрезки на плоскости 4
Окружности на плоскости .... ?
Окружности на плоскости, проходящие через фиксированную точку .... ?
Окружности, касающиеся данной окружности .... ?
Окружности, касающиеся двух данных окружностей .... ?
Окружности, касающиеся трёх данных окружностей .... ?
Прямые на плоскости .... ?
Прямые на плоскости, проходящие через данную точку .... ?
Лучи на плоскости .... ?
Шары в пространстве .... ?
Отрезки в пространстве .... ?
Прямые в пространстве .... ?
Треугольники на плоскости .... ?
Равнобедренные треугольники на плоскости .... ?
Равносторонние треугольники на плоскости .... ?