123. Параллелограмм

Параллелограммом называется четырёхугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

123.1. Докажите следующие свойства параллелограмма: (а) углы при соседних вершинах параллелограмма дают в сумме 180°, а углы при противоположных вершинах равны; (б) диагональ делит параллелограмм на два равных треугольника; (в) противоположные стороны параллелограмма равны; (г) точка пересечения диагоналей параллелограмма делит каждую из диагоналей пополам.

123.2. Докажите следующие признаки параллелограмма: (а) если в четырёхугольнике противоположные стороны попарно равны, то это параллелограмм; (б) если в четырёхугольнике противоположные углы попарно равны, то это параллелограмм; (в) если в четырёхугольнике две противоположные стороны равны и параллельны, то это параллелограмм; (г) если диагонали четырёхугольника делятся точкой их пересечения пополам, то это параллелограмм.

123.3. Биссектриса угла параллелограмма делит сторону параллелограмма на отрезки длиной 3 и 5. Найдите стороны параллелограмма.

123.4. В треугольнике ABC медиана AM продолжена за точку M до точки D на расстояние, равное AM (так что $AM = MD$). Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

Точку пересечения диагоналей параллелограмма называют его *центром*.

123.5. Докажите, что отрезок, соединяющий середины противоположных сторон параллелограмма, проходит через его центр.

123.6. Постройте параллелограмм по двум сторонам и диагонали, исходящим из одной вершины.

123.7. На сторонах параллелограмма взяты четыре точки, делящие эти стороны в одном и том же отношении (считая по часовой стрелке). Докажите, что они являются вершинами параллелограмма, центр которого совпадает с центром исходного.

123.8. Через данную точку внутри угла проведите прямую, отрезок которой, заключенный внутри этого угла, делится данной точкой пополам.

123.9. На сторонах AB и AC треугольника ABC постройте соответственно точки M и N так, что $BM = AN$ и $MN \parallel BC$.

123.10. Ранее было доказано, что биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке и серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке. Докажите, что и высоты треугольника пересекаются в одной точке.