125. Средняя линия треугольника

Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника.

125.1. Докажите, что она параллельна третьей стороне и равна её половине.

125.2. Докажите, что три средние линии разбивают треугольник на четыре равных треугольника.

125.3. С помощью циркуля и линейки постройте треугольник по серединам трех его сторон.

125.4. (Теорема Вариньона) Докажите, что середины сторон любого четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

125.5. Докажите, что середины двух противоположных сторон любого четырехугольника и середины его диагоналей являются вершинами параллелограмма.

125.6. Докажите, что (а) если отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырехугольника равны, то диагонали четырехугольника перпендикулярны; (б) если эти отрезки перпендикулярны, то диагонали четырехугольника равны.

125.7. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ отрезок, соединяющий середины сторон AB и CD равен 1. Прямые BC и AD перпендикулярны. Найдите отрезок, соединяющий середины диагоналей AC и BD.

125.8. Найдите геометрическое место середин всех отрезков, соединяющих данную точку со всеми точками данной прямой.

125.9. Из вершины A треугольника ABC опущены перпендикуляры AM и AP на биссектрисы внешних углов B и C. Найдите отрезок PM, если периметр треугольника ABC равен 10.

125.10. Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 2:1, считая от вершин треугольника.

125.11. Две медианы треугольника равны. Докажите, что треугольник равнобедренный.

125.12. Постройте параллелограмм по вершине и серединам сторон, не содержащим эту вершину.

125.13. Докажите, что сумма трех медиан треугольника меньше периметра, но больше трех четвертей периметра треугольника.

125.14. Точки M и N — середины соседних сторон BC и CD параллелограмма $ABCD$. Докажите, что прямые AM и AN делят диагональ BD на три равные части.

125.15. Постройте треугольник по высотам, проведенным из двух вершин, и медиане, проведенной из третьей.

125.16. На боковых сторонах AB и BC равнобедренного треугольника ABC взяты соответственно точки M и N, причём $BM = CN$. Докажите, что середина отрезка MN лежит на средней линии треугольника ABC, параллельной его основанию.

125.17. Постройте треугольник по стороне и медианам, проведенным к двум другим сторонам.

125.18. Постройте треугольник по трём медианам.

125.19. Докажите признак равенства треугольников по трём медианам.

* * *

125.20. Постройте пятиугольник по серединам его сторон.

125.21. Точки A_1, B_1 и C_1 образы произвольной точки M при симметрии относительно середин сторон соответственно BC, AC и AB треугольника ABC. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

125.22. В четырехугольнике $ABCD$ точка E — середина AB, точка F — середина CD. Докажите, что середины отрезков AF, CE, BF и DE являются вершинами параллелограмма.

125.23. В выпуклом четырехугольнике прямая, проходящая через середины двух противоположных сторон, образует равные углы с диагоналями четырехугольника. Докажите, что эти диагонали равны.

125.24. Докажите, что расстояние от вершины треугольника до точки пересечения высот вдвое больше, чем расстояние от центра описанного круга до противоположной стороны.

125.25. Постройте треугольник, зная три точки, симметричные центру его описанной окружности относительно сторон.

125.26. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны. Через середины сторон AB и AD проведены прямые, перпендикулярные противоположным сторонам CD и CB соответственно. Докажите, что эти прямые и прямая AC имеют общую точку.

125.27. Внутри треугольника ABC взята точка P, причём $\angle PAC = \angle PBC$. Из точки P на стороны BC и CA опущены перпендикуляры PM и PK соответственно. Пусть D — середина стороны AB. Докажите, что $DK = DM$.

125.28. На сторонах AB и BC треугольника ABC как на гипотенузах построены вне его прямоугольные треугольники APB и BQC с одинаковыми углами величины β при их общей вершине B. Найдите углы треугольника PQK, где K — середина стороны AC.

125.29. Два равносторонних треугольника ABC и CDE расположены по одну сторону от прямой AE и имеют единственную общую точку C. Пусть M, N и K — середины отрезков BD, AC и CE соответственно. Докажите, что треугольник MNK — равносторонний.