## 130. Углы, связанные с окружностью

*Центральный угол* — угол между двумя радиусами. *Угловая величина дуги* $AB$ (обозначается $\smile AB$) окружности с центром $O$ — угловая величина соответствующего центрального угла $AOB$. *Вписанный угол* — угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны являются хордами.

**130.1.** (Теорема о вписанном угле) Вписанный угол равен половине дуги, заключённой между его сторонами.

**130.2.** Точки $A$, $B$, $C$ и $D$ последовательно расположены на окружности. Известно, что угловые величины дуг $AB$, $BC$, $CD$ и $DA$ относятся как $1 : 3 : 5 : 6$. Найдите углы четырёхугольника $ABCD$.

**130.3.** Докажите, что у четырёхугольника, вписанного в окружность, сумма противоположных углов равна $180°$.

**130.4.** Рассмотрим четыре сегмента, отсекаемых от окружности вписанным в нее четырехугольником (и находящихся вне этого четырехугольника). Найдите сумму углов, вписанных в эти сегменты.

**130.5.** В круге провели три хорды $AB$, $BC$, $CD$ и отметили их середины: $M$, $N$, $K$. Докажите, что $\angle BMN = \angle NKC$.

**130.6.** Пусть $AA_1$ и $BB_1$ — высоты остроугольного треугольника $ABC$. Докажите, что $\angle CA_1B_1 = \angle CAB$.

**130.7.** Из точки $P$, расположенной внутри острого угла $BAC$, опущены перпендикуляры $PC_1$ и $PB_1$ на прямые $AB$ и $AC$. Докажите, что $\angle C_1AP = \angle C_1B_1P$.

**130.8.** Три прямые, проходящие через точку $O$, образуют друг с другом углы в $60°$. Докажите, что проекции любой точки (кроме самой точки $O$) на эти прямые являются вершинами правильного треугольника.

**130.9.** Вершины угольника скользят по сторонам прямого угла. Найдите траекторию вершины прямого угла угольника.

**130.10.** Две окружности пересекаются в точках $A$ и $B$. Продолжения хорд $AC$ и $BD$ первой окружности пересекают вторую окружность в точках $E$ и $F$. Докажите, что прямые $CD$ и $EF$ параллельны.

**130.11.** Угловые величины противоположных дуг, высекаемых на окружности пересекающимися хордами, равны $\alpha$ и $\beta$. Найдите угол между хордами.

**130.12.** Угловые величины дуг, заключённых между двумя хордами, продолжения которых пересекаются вне круга, равны $\alpha$ и $\beta$, при этом $\alpha > \beta$. Под каким углом пересекаются продолжения хорд?

**130.13.** Точки $A$, $B$, $C$, $D$ лежат на окружности. Точки $M$, $N$, $K$, $L$ — середины дуг $AB$, $BC$, $CD$ и $DA$ соответственно. Докажите, что $MK \perp NL$.

**130.14.** Продолжения противоположных сторон $AB$ и $CD$ вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке $M$, а сторон $AD$ и $BC$ - в точке $N$. Докажите, что биссектрисы углов $AMD$ и $DNC$ взаимно перпендикулярны.

**130.15.** Найдите геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден под данным углом.

**130.16.** С помощью циркуля и линейки постройте треугольник по стороне, противолежащему углу и высоте, проведённой из вершины этого угла.

**130.17.** Прямая, проходящая через точку $A$ и центр вписанной окружности треугольника $ABC$, вторично пересекает описанную окружность этого треугольника в точке $M$. Докажите, что треугольники $BOM$ и $COM$ — равнобедренные.

**130.18.** Точка $O$ — центр окружности, описанной около треугольника $ABC$, причём $\angle AOC = 60°$. Найдите угол $AMC$, где $M$ — центр окружности, вписанной в треугольник $ABC$.

**130.19.** Точки $A$ и $B$ — фиксированные точки окружности, точка $C$ — произвольная точка окружности. Найдите геометрическое место точек пересечения (**а**) биссектрис; (**б**) высот треугольника $ABC$.

**130.20.** Продолжения биссектрис остроугольного треугольника $ABC$ пересекают описанную вокруг него окружность в точках $A_1$, $B_1$, $C_1$. Докажите, что высоты треугольника $A_1B_1C_1$ лежат на прямых $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$.

**130.21.** Продолжения высот остроугольного треугольника $ABC$ пересекают описанную окружность этого треугольника в точках $A_1$, $B_1$, $C_1$. Докажите, что биссектрисы треугольника $A_1B_1C_1$ лежат на прямых $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$.

**130.22.** Во вписанном четырёхугольнике $ABCD$ известны углы $\angle DAB = \alpha$, $\angle ABC = \beta$ и угол $\angle BKC = \gamma$ (здесь $K$ — точка пересечения диагоналей). Найдите угол $ACD$.

**130.23.** Докажите, что около четырёхугольника, сумма противоположных углов которого равна $180°$, можно описать окружность.

**130.24.** Докажите, что точка, симметричная точке пересечения высот (ортоцентру) треугольника относительно одной из сторон, лежит на описанной окружности.

**130.25.** Пусть $O$ — центр описанной вокруг треугольника $ABC$ окружности, $AH$ — высота. Докажите, что $\angle BAH = \angle OAC$.

**130.26.** Пусть $AA_1$ и $BB_1$ — высоты остроугольного треугольника $ABC$, точка $O$ — центр описанной окружности. Докажите, что $CO \perp A_1B_1$.

**130.27.** Четырёхугольник $ABCD$, диагонали которого взаимно перпендикулярны, вписан в окружность. Перпендикуляры, опущенные на сторону $AD$ из вершин $B$ и $C$, пересекают диагонали $AC$ и $BD$ в точках $E$ и $F$ соответственно. Известно, что $BC = 1$. Найдите $EF$.

**130.28.** Постройте с помощью циркуля и линейки треугольник по точкам пересечения с описанной окружностью продолжений его высоты, медианы и биссектрисы, проведённых из одной вершины.

**130.29.** Докажите, что угол между касательной и хордой, проведенной через точку касания, равен половине угловой величины дуги, заключенной между ними.

**130.30.** К двум окружностям, пересекающимся в точках $K$ и $M$, проведена общая касательная. Докажите, что если $A$ и $B$ - точки касания, то $\angle AMB + \angle AKB = 180°$.

**130.31.** Касательная в точке $A$ к описанной окружности треугольника $ABC$ пересекает прямую $BC$ в точке $E$; отрезок $AD$ — биссектриса треугольника $ABC$. Докажите, что $AE = ED$.

**130.32.** Две окружности пересекаются в точках $A$ и $B$. Через точку $K$ первой окружности проводятся прямые $KA$ и $KB$, пересекающие вторую окружность в точках $P$ и $Q$. Докажите, что хорда $PQ$ второй окружности перпендикулярна диаметру $KM$ первой окружности.

**130.33.** Около равностороннего треугольника $ABC$ описана окружность, и на дуге $BC$ взята произвольная точка $M$. Докажите, что $AM = BM + CM$.

**130.34.** Треугольник с вершинами в основаниях высот треугольника $ABC$ называется ортотреугольником треугольника $ABC$. Докажите, что высоты треугольника $ABC$ являются биссектрисами его ортотреугольника.

* * *

**130.35.** Из точки $A$ проведены к окружности две касательные $AP$ и $AQ$ (точки $P$ и $Q$ — точки касания) и секущая $AKL$ (точка $K$ лежит между $A$ и $L$). Пусть $M$ — середина отрезка $KL$. Докажите, что $\angle AMP = \angle AMQ$.

**130.36.** Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из произвольной точки описанной окружности на стороны треугольника (или их продолжения), лежат на одной прямой (*прямая Симсона*).

**130.37.** Две окружности касаются внутренним образом в точке $M$. Пусть $AB$ — хорда большей окружности, касающаяся меньшей окружности в точке $T$. Докажите, что $MT$ — биссектриса угла $AMB$.

**130.38.** Две окружности пересекаются в точках $A$ и $B$. Через точку $B$ проводится прямая, пересекающая окружности в точках $C$ и $D$, а затем через точки $C$ и $D$ проводятся касательные к этим окружностям. Докажите, что точки $A$, $C$, $D$ и точка $P$ пересечения касательных лежат на одной окружности.

**130.39.** Окружность $S_2$ проходит через центр $O$ окружности $S_1$ и пересекает ее в точках $A$ и $B$. Через точку $A$ проведена касательная к окружности $S_2$. Точка $D$ — вторая точка пересечения этой касательной с окружностью $S_1$. Докажите, что $AD = AB$.

**130.40.** Точки касания вписанного в данный треугольник круга соединены отрезками и в полученном треугольнике проведены высоты. Докажите, что прямые, соединяющие основания этих высот, параллельны сторонам исходного треугольника.

**130.41.** Диагонали трапеции с основаниями $AD$ и $BC$ пересекаются в точке $O$. Докажите, что окружности, описанные около треугольников $AOD$ и $BOC$, касаются друг друга.

**130.42.** Окружности $S_1$ и $S_2$ пересекаются в точках $A$ и $P$. Через точку $A$ проведена касательная $AB$ к окружности $S_1$, а через точку $P$ — прямая $CD$, параллельная прямой $AB$ (точки $B$ и $C$ лежат на $S_2$, точка $D$ — на $S_1$). Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

**130.43.** Окружность $S_1$ касается сторон угла $ABC$ в точках $A$ и $C$. Окружность $S_2$ касается прямой $AC$ в точке $C$ и проходит через точку $B$. Окружность $S_1$ она пересекает в точке $M$. Докажите, что прямая $AM$ делит отрезок $BC$ пополам.

**130.44.** К двум окружностям различного радиуса проведены общие внешние касательные $AB$ и $CD$. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ описанный тогда и только тогда, когда окружности касаются.