141. Осевая симметрия

141.1. Докажите, что диагональ ромба является его осью симметрии.

141.2. Существует ли фигура, не имеющая осей симметрии, но переходящая в себя при некотором повороте?

141.3. Существует ли фигура, не имеющая ни осей симметрии, ни центров симметрии, но переходящая в себя при некотором повороте?

141.4. Найдите координаты точки, симметричной точке $M(x; y)$ относительно а) оси ординат; б) оси абсцисс; в) прямой $x = a$; г) прямой $y = b$; д) прямой $y = x$; е) прямой $y = -x$.

141.5. Фигура имеет две перпендикулярные оси симметрии. Докажите, что она имеет центр симметрии.

141.6. Существует ли фигура, имеющая ровно две оси симметрии, но не имеющая центра симметрии?

141.7. Четырехугольник имеет ровно две оси симметрии. Верно ли, что он — либо прямоугольник, либо ромб?

141.8. Может ли пятиугольник иметь ровно две оси симметрии?

141.9. Может ли фигура иметь центр симметрии и ровно одну ось симметрии?

141.10. Докажите, что всякий выпуклый четырехугольник с осью симметрии либо вписанный, либо описанный.

141.11. Точки A и B лежат по разные стороны от прямой l. Постройте на этой прямой точку M так, чтобы прямая l делила угол AMB пополам.

141.12. Внутри острого угла даны точки M и N. Как из точки M направить луч света, чтобы он, отразившись последовательно от сторон угла, попал в точку N ?

141.13. AB - диаметр окружности; C, D, E — точки на одной полуокружности $ACDEB$. На диаметре AB взяты: точка F так, что $\angle CFA = \angle DFB$, и точка G так, что $\angle DGA = \angle EGB$. Найдите $\angle FDG$, если дуга AC равна 60°, а дуга BE равна 20°.

141.14. Внутри острого угла даны точки M и N. Постройте на сторонах угла точки K и L так, чтобы периметр четырехугольника $MKLN$ был наименьшим.

141.15. Постройте треугольник по данным серединам двух его сторон и прямой, на которой лежит биссектриса, проведенная к одной из этих сторон.

141.16. Постройте треугольник по основаниям двух его биссектрис и прямой, на которой лежит третья биссектриса.

141.17. Точки M и N расположены по разные стороны от прямой l. Постройте на прямой l такую точку K, чтобы разность отрезков MK и NK была наибольшей.

141.18. На плоскости даны прямая l и две точки A и B по одну сторону от нее. На прямой l выбраны точка M, сумма расстояний от которой до точек A и B наименьшая, и точка N, для которой расстояния от A и B равны: $AN = BN$. Докажите, что точки A, B, M, N лежат на одной окружности.

141.19. Постройте четырехугольник $ABCD$ по четырем сторонам, если известно, что его диагональ AC является биссектрисой угла A.

141.20. Постройте четырехугольник $ABCD$ по двум сторонам AB и AD и двум углам B и D, если известно, что в него можно вписать окружность.

141.21. Постройте треугольник, если дана одна его вершина и три прямых, на которых лежат его биссектрисы.

141.22. Постройте треугольник по двум сторонам и разности углов, прилежащих к третьей.

141.23. Постройте треугольник по двум углам и разности противолежащих им сторон.

141.24. Постройте треугольник по разности двух сторон, углу между ними и стороне, противолежащей этому углу.

141.25. AD — биссектриса угла A в треугольнике ABC. Через точку A проведена прямая, перпендикулярная к AD, и из вершины B опущен перпендикуляр BB_1 на эту прямую. Докажите, что периметр треугольника BB_1C больше периметра треугольника ABC.

141.26. Среди всех треугольников ABC с данным углом C и стороной AB найдите треугольник с наибольшим возможным периметром.

141.27. Найдите среди всех треугольников с данным основанием и данной площадью треугольник наименьшего периметра.

141.28. Постройте остроугольный треугольник по основаниям двух его высот и прямой, содержащей третью высоту.

141.29. Постройте треугольник по центру его описанной окружности и двум прямым, на которых лежат высоты.

141.30. *(Задача Фаньяно)* Впишите в данный остроугольный треугольник ABC треугольник наименьшего периметра.

141.31. На плоскости заданы две пересекающиеся прямые, и на них отмечено по одной точке (D и F). Постройте треугольник ABC, у которого биссектрисы CD и AE лежат на данных прямых, а их основания — данные точки D и F.

141.32. Восстановите треугольник, если на плоскости отмечены три точки: O — центр описанной окружности, P — точка пересечения медиан и H — основание одной из высот этого треугольника.

141.33. Найдите углы остроугольного треугольника ABC, если известно, что его биссектриса AD равна стороне AC и перпендикулярна отрезку OH, где O — центр описанной окружности, H — точка пересечения высот треугольника ABC.

141.34. Даны прямая l и точки A и B по одну сторону от нее. Пусть A_1 и B_1 — проекции этих точек на прямую l. Постройте на прямой l такую точку M, чтобы угол AMA_1 был вдвое меньше угла BMB_1.

141.35. На плоскости дан треугольник ABC и точка M. Известно, что точки, симметричные точке M относительно двух сторон треугольника ABC попадают на окружность, описанную около треугольника ABC. Докажите, что точка, симметричная точке M относительно третьей стороны, также попадает на эту окружность.

141.36. Внутри треугольника ABC с углами $\angle A = 50^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, $\angle C = 70^\circ$ дана точка M такая, что $\angle AMB = 110^\circ$, $\angle BMC = 130^\circ$. Найдите $\angle MBC$.

141.37. Постройте равнобедренный треугольник, основание которого лежало бы на одной стороне данного острого угла, вершина — на другой стороне того же угла, а боковые стороны проходили бы через две данные точки внутри этого угла.

141.38. Дана прямая l и точки A и B по одну сторону от нее. С помощью циркуля и линейки постройте на прямой l точку X такую, что $AX+BX = a$, где a — данная величина.