144. Гомотетия

144.1. На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты точки M и N так, что $MN \parallel BC$. На отрезке MN взята точка P так, что $MP = MN/3$. Прямая AP пересекает сторону BC в точке Q. Докажите, что $BQ = BC/3$.

144.2. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и отношению катетов.

144.3. Постройте прямоугольный треугольник по данному отношению одного катета к гипотенузе и второму катету.

144.4. На плоскости даны точки A и B и прямая l. По какой траектории движется точка пересечения медиан треугольников ABC, если точка C движется по прямой l?

144.5. На основаниях трапеции как на сторонах построены во внешнюю сторону два квадрата. Докажите, что отрезок, соединяющий центры квадратов, проходит через точку пересечения диагоналей трапеции.

144.6. Постройте трапецию, если даны: отношение ее оснований, два угла при одном из этих оснований и высота.

144.7. Даны два отрезка, лежащие либо на одной прямой, либо на двух параллельных. Сколько существует гомотетий, переводящих эти отрезки друг в друга?

144.8. Докажите, что две касающиеся окружности гомотетичны относительно их точки касания.

144.9. Две окружности касаются в точке K. Прямая, проходящая через точку K, пересекает эти окружности в точках A и B. Докажите, что касательные к окружностям, проведенные через точки A и B, параллельны.

144.10. Сколько существует гомотетий, переводящих друг в друга две окружности?

144.11. Постройте общую касательную к двум данным окружностям.

144.12. Найдите геометрическое место середин отрезков, соединяющих данную точку, лежащую вне данной окружности, с точками этой окружности.

144.13. Через данную точку проведите секущую к данной окружности так, чтобы внешняя часть секущей была равна внутренней.

144.14. С помощью циркуля и линейки постройте хорду данной окружности, которую два данных радиуса разделили бы на три равные части.

144.15. Через точку M, лежащую на данной окружности, проведите хорду, которая данной хордой AB делилась бы пополам.

144.16. Постройте окружность, касающуюся данной прямой и данной окружности в данной на ней точке.

144.17. Постройте окружность, касающуюся данной окружности и данной прямой в данной на ней точке.

144.18. Через данную точку проведите окружность, касающуюся данных прямой и окружности.

144.19. В данный треугольник впишите квадрат так, чтобы одна сторона квадрата была расположена на стороне треугольника, а остальные вершины квадрата лежали на двух других сторонах треугольника.

144.20. Два треугольника $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$, площади которых равны S_1 и S_2, расположены так, что лучи A_1B_1 и A_2B_2, B_1C_1 и B_2C_2, C_1A_1 и C_2A_2 параллельны, но противоположно направлены. Найдите площадь треугольника с вершинами в серединах отрезков A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2.

144.21. На окружности фиксированы точки A и B, а точка C движется по этой окружности. Найдите геометрическое место точек пересечения медиан треугольников ABC.

144.22. Вершины K и N треугольника KMN перемещаются соответственно по сторонам AB и AC угла BAC, а стороны треугольника KMN соответственно параллельны трем данным прямым. Найдите геометрическое место вершин M.

144.23. Через точку D, взятую на стороне AB треугольника ABC, проведена прямая, параллельная AC, и пересекающая сторону BC в точке E. Докажите, что AE, CD и медиана, проведенная через вершину B, пересекаются в одной точке.

144.24. В данный параллелограмм впишите ромб так, чтобы стороны ромба были параллельны диагоналям параллелограмма, а вершины ромба лежали бы на сторонах параллелограмма.

144.25. В данный треугольник впишите другой треугольник, стороны которого соответственно параллельны трем данным прямым.

144.26. На сторонах AB и AC треугольника ABC постройте соответственно точки M и N так, что $AM = MN = NC$.

144.27. Впишите в треугольник две равные окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника и другой окружности.

144.28. Постройте треугольник ABC, если заданы его наименьший угол $\angle A$ и отрезки длины $d = AB - BC$ и $e = AC - BC$.

144.29. Впишите в данный угол окружность, проходящую через данную внутри угла точку.

144.30. Впишите в данный угол окружность, касающуюся данной окружности.

144.31. (*Прямая Эйлера*) Докажите, что точка пересечения медиан, ортоцентр и центр описанной окружности треугольника лежат на одной прямой. (Рассмотрите $H_M^{1/2}$, где M — точка пересечения медиан).

144.32. Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M; P — произвольная точка. Прямая l_a проходит через точку A параллельно прямой PA_1, прямые l_b и l_c определяются аналогично. Докажите, что

а) прямые l_a, l_b и l_c пересекаются в одной точке Q;

б) точка M лежит на отрезке PQ, причем $PM : MQ = 1 : 2$.

144.33. Сторона C_1C_2 прямоугольника C_1C_2PR расположена на стороне AB треугольника ABC, сторона B_1B_2 прямоугольника B_1B_2QP — на стороне AC, сторона A_1A_2 прямоугольника A_1A_2RQ — на стороне BC, причем точки P, Q и R лежат внутри треугольника ABC. Докажите, что прямые AP, BR и CQ пересекаются в одной точке.

144.34. Вписанная окружность треугольника ABC касается стороны AC в точке D, DM — ее диаметр. Прямая BM пересекает сторону AC в точке K. Докажите, что $AK = DC$.

144.35. В треугольнике ABC через середину M стороны BC и центр O вписанной в этот треугольник окружности проведена прямая MO, которая пересекает высоту AH в точке E. Докажите, что отрезок AE равен радиусу вписанной окружности.

144.36. Рассмотрим всевозможные пары касающихся внешним образом окружностей, вписанных в круговой сегмент. Докажите, что общие внутренние касательные каждой такой пары проходят через одну точку.

144.37. Две окружности радиусов r и R ($r < R$) внешним образом касаются друг друга. Прямая касается этих окружностей в точках M и N. В точках A и B окружности касаются внешним образом третьей окружности. Прямые AB и MN пересекаются в точке C. Из точки C проведена касательная к третьей окружности (D — точка касания). Найдите CD.

144.38. В полукруг помещены две окружности диаметром d и D ($d < D$) так, что каждая окружность касается дуги и диаметра полукруга, а также другой окружности. Через центры окружностей проведена прямая, пересекающая продолжение диаметра полукруга в точке M. Из точки M проведена касательная к дуге полукруга (N — точка касания). Найдите длину отрезка MN.

144.39. Через данную точку проведите прямую, отсекающую от данного угла треугольник наименьшего возможного периметра.

144.40. Опустим из любой точки P биссектрисы угла A треугольника ABC перпендикуляры PA_1, PB_1, PC_1 на его стороны BC, CA и AB соответственно. Пусть R — точка пересечения прямых PA_1 и B_1C_1. Докажите, что прямая AR делит сторону BC пополам.

144.41. Равные окружности S_1 и S_2 касаются внутренним образом окружности S в точках A_1 и A_2. Пусть C — некоторая точка окружности S, прямые A_1C и A_2C пересекают окружности S_1 и S_2 в точках B_1 и B_2 соответственно. Докажите, что $B_1B_2 = (?)A_1A_2$.

144.42. 42. На плоскости расположены три окружности S_1, S_2, S_3 радиусов r_1, r_2, r_3 — каждая вне двух других, причем $r_1 > r_2$ и $r_1 > r_3$. Из точки пересечения внешних касательных к окружностям S_1 и S_2 проведены касательные к окружности S_3, а из точки пересечения внешних касательных к окружностям S_1 и S_3 проведены касательные к окружности S_2. Докажите, что последние две пары касательных образуют четырехугольник, в который можно вписать окружность, и найдите ее радиус.

144.43. На отрезках AB, BC и CA треугольника ABC построены во внешнюю сторону квадраты ABB_1A_2, BCC_1B_2 и CAA_1C_2. Докажите, что перпендикуляры к отрезкам A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2, восставленные в их серединах, пересекаются в одной точке.