29. Собеседование 13 апреля 1996

29.1. На доске написаны числа $1, 2, 3, \ldots, 1996$. Вася вычеркнул каждое десятое число, считая от начала (т.е. $10, 20, 30, \ldots$). После этого он вычернул каждое девятое число из оставшихся, затем каждое восьмое, каждое седьмое, ... , каждое второе. Сколько чисел останется? Какое число будет стоять на последнем месте?

29.2. Докажите равенство:

$$\frac{1}{1\cdot 199}+\frac{1}{3\cdot 197}+\frac{1}{5\cdot 195}+\ldots+\frac{1}{197\cdot 3}+\frac{1}{199\cdot 1}=\frac{1}{100}(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{199})$$

29.3. В выражении $(a+b-c)(d-e-f)(g-h+i)(k+l+m)$ раскрыли скобки. Сколько членов получится? Перед сколькими из них будет стоять знак минус?

29.4. В треугольнике ABC угол A равен 60°. Известно, что биссектриса угла A, медиана, проведённая из вершины B, и высота, опущенная из вершины C, пересекаются в одной точке. Докажите, что треугольник равносторонний.

29.5. На плоскости лежит картонный квадрат, который разрешается перекатывать через рёбра (при перекатывании ребро остаётся на месте, а квадрат переворачивается на другую сторону). После нескольких перекатываний квадрат вернулся в то же место плоскости. Докажите, что он оказался в прежнем положении (т.е. все его вершины оказались на исходных местах).