33.1. На столе лежало печенье. Сначала Вася съел половину печенья и еще полпеченья. Потом Гриша съел половину печенья и ещё полпеченья. Потом Боря съел половину печенья и ещё полпеченья. Потом пришла Таня — а печенье всё кончилось. Сколько печенья было вначале?

33.2. Ося пишет последовательность $1, 3, 7, 15, \ldots$ Каждое следующее число получается из предыдущего умножением на 2 и прибавлением 1. Юля прибавляет ко всем его числам по единице и замечает, что получаются степни двойки: $2, 4, 8, 16, \ldots$ Будет ли эта закономерность продолжаться?

33.3. Игра «Ханойские башни» имеет три вертикальных стержня. На один из них надета пирамидка из колец разного размера (меньшие на больших). Как переложить кольца на другой стержень, если перекладывать можно только по одному, большее на меньшее класть нельзя и пирамидка состоит из (а) трёх колец; (б) четырёх колец; (в) произвольного числа колец?

33.4. Круглый торт разрезали ножом по нескольким прямым, и куски дали гостям. После этого выяснили, что одна из сторон ножа была грязной. Доказать, что хотя бы один из гостей получил чистый (со всех сторон) кусок.

33.5. Двузначное число из цифр x и y (то есть $10x + y$) делится на 7 в том и только том случае, если разность между $2y$ и x делится на 7. Почему?

33.6. Участники шахматного турнира сыграли друг с другом по разу, причём ничьих не было. Доказать, что можно составить список участников так, чтобы каждый выиграл у (непосредственно) следующего за ним.

33.7. Володя и Лёша играют в крестики на доске 3×3 по таким правилам: ходят по очереди, ставя крестик в любую свободную клетку. Проигрывает тот, кто не может сделать ход (некуда). Первым ходит Володя. Кто выиграет?

33.8. Имеются шесть чисел a, b, c, d, e, f. Известно, что произведения ac, be, df и ea положительны. Может ли произведение (а) bc; (б) af быть отрицательным?

33.9. Никита расставляет на доске размером 2×6 шахматных коней и хочет, чтобы ни один из них не мог побить другого, как бы они не ходили (конь ходит буквой «Г»). Какое наибольшее число коней он сможет поставить?

33.10. (а) Нарисуйте конверт с откинутым клапаном (рис. 33.1), не отрывая карандаша от бумаги и не рисуя дважды одной и той же линии. (б) Это можно сделать по-разному, но концы траектории карандаша всегда одни и те же. Почему?

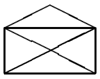

Рис.1

33.11. (а) Можно ли разрезать шахматную доску (8×8) на прямоугольники размером 3×1? (б) Тот же вопрос для доски с вырезанной угловой клеткой.

33.12. Можно ли разрезать шахматную доску (8×8) с вырезанными угловыми клетками $a1$ и $h8$ на прямоугольники размером 2×1?

33.13. Может ли шахматный конь обойти все клетки, начав с $a1$ и закончив в $h8$, побывав на каждой клетке один раз?

33.14. Какое максимальное количество чисел можно выбрать среди чисел от 1 до 100, если среди выбранных не должно быть двух чисел, отличающихся ровно в два раза?

33.15. Можно ли замостить всю плоскость квадратами, среди которых всего два одинаковых?

33.16. (а) Можно ли полосками 1×5 замостить прямоугольник, у которого обе стороны не делятся на 5? (б) Можно ли полосками 1×6 замостить прямоугольник, у которого обе стороны не делятся на 6?

33.17. Электронные часы показывают время от 00: 00 до 23: 59. Они сломались, и цифры минут повторяют цифры часов (04: 04, 05: 05 и т. п.). Какова минимальная разница во времени между двумя показаниями этих часов?

33.18. (а) Никита хочет написать 70 разных двузначных чисел, но не хочет, чтобы два из них давали в сумме 150. Возможно ли это? (б) Тот же вопрос, если в сумме не должно получаться 130.

33.19. Докажите, что из любых 95 натуральных чисел можно выбрать два, разность которых делится на 94.

33.20. Дано 5 чисел; сумма любых 3 из них четна. Доказать, что все числа чётны.

33.21. Из чисел $1, 2, 3, 4, \ldots, 19, 20$ выбрали 11. Доказать, что одно из выбранных чисел делится нацело на другое.

33.22. Сколько различных слов (не обязательно осмысленных) можно получить, переставляя буквы в слове (а) ТОЧКА; (б) ЛИНИЯ; (в) ПОТОП; (г) МАТЕМАТИКА?

33.23. 1993 ганстера стоят на плоскости; расстояния между ними попарно различны. Ровно в полдень каждый выстрелил в ближайшего к нему. Доказать, что по крайней мере один из гангстеров останется в живых.

33.24. Боря и Наташа играют в следующую игру: сначала Наташа называет число 3, 5 или 7, потом они по очереди прибавляют к имеющемуся числу 3, 5 или 7 и говорят ответ. Наташа имеет право называть только простые числа. Цель Наташи — назвать число, большее 100, цель Бори — не позволить ей. Кто победит при правильной игре?

33.25. (а) Докажите, что из любых трёх целых чисел можно выбрать два, сумма которых чётна. (б) Докажите, что из любых семи целых чисел можно выбрать три, сумма которых делится на 3.

33.26. Плоскость раскрашена в два цвета. Всегда ли найдутся две точки одного цвета на расстоянии 1 метр друг от друга?

33.27. На доске написано несколько положительных чисел, каждое из которых равно половине суммы остальных. Сколько чисел написано на доске?

33.28. В вершинах 10-угольника расставлены числа; каждое есть среднее арифметическое двух своих соседей. Докажите, что все числа равны.

33.29. На листе клетчатой бумаги двое по очереди обводят линии сетки — один красным цветом, а другой чёрным. На каждом шаге можно обвести линию между двумя соседними узлами; уже обведённые лннии обводить заново нельзя. Цель первого — нарисовать красный замкнутый контур, цель второго — не допустить этого. Кто победит?

33.30. На доске написаны числа $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55$. За один шаг разрешается увеличить два из них на 1. Можно ли несколькими такими операциями сделать все числа равными?

33.31. На столе стоят 57 стаканов. За ход разрешается перевернуть любые (а) 5 (б) 6 стаканов. Можно ли за несколько ходов поставить стаканы вверх дном?

33.32. Прямоугольная таблица из 5 строк и 7 столбцов заполнена числами. (а) Может ли сумма чисел в каждой строке быть положительной, а в каждом столбце — отрицательной? (б) Может ли сумма чисел в каждой строке быть чётной, а в каждом столбце — нечётной?

33.33. (а) В ряд стоят 6 сосен и на каждой сидит чиж. Каждую минуту два чижа перелетают на соседнюю сосну — один направо, другой налево. Могут ли чижи собраться на одной сосне? (б) Тот же вопрос, если сосны стоят по кругу, и один из чижей летит по часовой стрелке, а другой — против?

33.34. На доске выписаны числа $1, 2, \ldots, 19, 20$. Разрешается стереть любые два числа a и b, заменив их на $a + b - 1$, пока на доске не останется одно число. Какое число может остаться?

33.35. Тот же вопрос, если a и b можно заменить на $a + b + ab$.