Вечерняя математическая школа

Так называется кружок по математике, который традиционно работает в пятьдесят седьмой школе для московских школьников 7 и 8 класса. Одна из основных целей этого кружка — найти будущих учеников школы, хотя по традиции независимо от своих успехов на кружке школьники вседьмых и восьмых классов.тупительные экзамены (традиционно называемые «собеседованиями») на общих основаниях.

Занятия ВМШ (вечерней математической школы) проходят раз в неделю, обычно в трёх–пяти группах (в каждом параллели) по одним и тем же задачам. Приходить может любой школьник, начиная с любого занятия. Обычно занятие происходит так: выдаются листки с задачами; школьник, решивший задачу, поднимает руку, к нему подходит кто-то из преподавателей и слушает решение. Иногда решение разбирается у доски. Задачи подбираются более или менее по темам, но с таким расчётом, чтобы пришедший впервые школьник также мог их решать.

Как правило, мы включали в задание шесть задач (обычно пятая и шестая задача были не совсем математические).

1. Приглашение

Московская Государственная Пятьдесят Седьмая Школа приглашает семи- и восьмиклассников на математический кружок. Занятия будут проходить по средам, с 16 часов. Первое занятие состоится 4 октября. Просьба иметь при себе тетрадку, ручку и сменную обувь.

Адрес школы — М. Знаменский пер. (бывшая ул. Маркса–Энгельса), дом 7. Проезд до станций метро «Кропоткинская», «Библиотека им. Ленина», «Арбатская», «Боровицкая», «Александровский сад». Телефоны — 2915458, 2915940.

2. Занятие 4 октября 1995

2.1. Может ли шахматный конь обойти все 9 полей доски 3×3?

2.2. Сравнить дроби
$$\frac{1994}{1995} \quad \text{и} \quad \frac{1995}{1996}$$

2.3. Как вы думаете, в записи числа 2^{1000} (произведение тысячи двоек) больше 500 цифр или меньше? Почему?

2.4. Купец продал кафтан покупателю за 10 рублей. У него не было сдачи с 25 рублей, и он разменял 25-рублевую купюру покупателя у соседа. Покупатель ушел. Сосед приходит: «Бумажка фальшивая». Пришлось купцу дать настоящую. Что потерял купец?

2.5. Двое хотят перейти прямую канаву шириной 4 метра. На краю они нашли две прочные доски длиной $3,5$ метра каждая. Как им перейти на другую сторону?

2.6. Следующий текст получен из хорошо известного заменой каждой буквы на какую-то другую. Последнее слово пропущено. Восстановить его.

— Сагдау ра накя, сагдау ра накя? — пудгэбуз Увнюв Сушванщэб, лсгецуе л цгяжюь сюсюзуь галлдэм цзуцюз *нака* ву шгувтаплдэм зуф. — Е вя ьюца фюгьэг р сюняьдуж. — Фяшюгч вя сювез яцю рюлдзэтувэе э сючязуз яьа фючгюм вюбэ.

— Сгюдзеном чулагьув, — сгюрюгбуз Лсэтов, пуданоруелщ р юфяезю. — Вачвю яьа чозю лрябда накэнщ. Яьа чя жачя. Е лсунщ вя ьюца чяп юцве. — Ьалщя, ьалщя, — сгюфюзчуз юв, — чя ря уряд ра сугзя. — Вю шгувтап вя юнрябуз э рлдюгя пужгусяз . . .

Увнюв Сушванщэб пуьюзбуз, алнузюлнщ э рэввоя суго ьузю-сюьуза сгярюпьюцзэ яцю чюепзэрюлнщ, юв лнуз фгяьунщ, э рлдюгя цзачюдэм люв юрзуфяз эь люрягкяввю.

Лнгуввюя цюнюрэзюлщ яьа сгючючфявэя. Юв барлнрюруз лдрюпщ люв, бню дню-ню нэжювщдю фягцуз яцю пу рюгюн гачукдэ. Увнюв Сушванщэб юндгоз цзупу э сгэ чзяфвюь лряня юляввяцю ангу арэфяз сягяф лючюм Фяшюгчу: шгувтап р юфвюм гадя фягчуз дугьуввом сэлнюзян, у фгацюи юнлняцэруз пурянваи лаьа. Увнюв Сушванэщэб ючьяг.

— Дялщ дя ля, ьалщя, дялщ дя ля, — сгюэпвял юв нгясяхахэь цюзюлюь.

— Нэкя, ьюзбунщ, — юнрябуз абэнязщ бэлноь галлдэь еподюь, — ьюзбунщ ээз ро сгюсузэ. Е .

Задача 2.1 совсем проста: конь не может попасть на среднее центральное поле. Наводящий вопрос к задаче 2.2: на сколько эти дроби меньше единицы? В задаче 2.4 есть три уровня глубины экономического анализа: можно считать, что купец потерял 25 рублей, можно считать, что он потерял 15 рублей и кафтан; наконец, можно заметить, что он потерял 15 рублей и кафтан, но приобрёл фальшивую бумажку. Указание к задаче 2.5: можно выдвинуть одну из досок за край канавы на полметра или чуть больше и встать на другой конец, чтобы она не опрокинулась. Задача 2.6 предполагает, что школьник читает книги — иначе её не решить. (Небольшой подвох состоит в том, что начальные слова отрывка — не русские!)

3. Занятие 11 октября 1995

3.1. В строку написаны 10 единиц подряд. Перед каждой из них (в том числе и перед первой) стоит плюс или минус. Какие числа могут получиться в сумме? Почему?

3.2. Можно ли нарисовать пятиугольник и точку внутри него так, чтобы любая сторона пятиугольника была бы видна из неё под углом 70°?

3.3. Как разделить 7 одинаковых яблок поровну между 12 людьми, если яблоки разрешается резать не более чем на 5 частей?

3.4. Двое играют в такую игру. Первый называет число от 1 до 10, затем второй называет число от 1 до 10. Первый выигрывает, если сумма чисел чётна. Кто выигрывает при правильной игре (первый или второй) и как он должен играть? Тот же вопрос, если вместо суммы чисел вычисляют их произведение.

3.5. В стакане с водой плавает кусочек льда. Как изменится уровень воды в стакане, когда лёд растает?

3.6. Отгадать закон и продолжить таблицу:

1					
1	1				
2	1				
1	2	1	1		
1	1	1	2	2	1
3	1	2	2	1	1
...					

4. Занятие 18 октября 1995

4.1. У Васи в комоде лежат 10 черных, 16 синих и 20 зелёных носков. Сколько носков надо достать не глядя, чтобы среди них заведомо была пара носков одного цвета?

4.2. У Пети в комоде валяются 10 чёрных рукавиц (5 пар), 16 синих (8 пар) и 20 зелёных (10 пар). Сколько рукавиц надо достать не глядя, чтобы заведомо можно было выйти на улицу в рукавицах одного цвета?

4.3. Сколько чисел от 00 до 99 содержат в своей записи цифру 3 и сколько не содержат? Сколько чисел от 000 до 999 содержат в своей записи цифру 3 и сколько не содержат?

4.4. Прямоугольную шоколадку размером 3×4 разламывают на дольки 1×1. Сколько разломов для этого необходимо (ломать одновременно два кусочка не разрешается)? Можно ли обойтись меньшим числом разломов?

4.5. Большой ящик заполнен мелкой картошкой. Другой столь же большой ящик заполнен ещё более мелкой картошкой. Как вы думаете, в каком из ящиков больше картошки (по весу)?

4.6. В комнате стоят три электрические лампочки, в соседней — три выключателя к ним, причем на каждом написано «включено» и «выключено», но неизвестно, какой выключатель соответствует какой лампочке. Лампочки из комнаты с выключателями не видны. Как определить, какой выключатель соответствует какой лампочке? Разрешается зайти в комнату с выключателями, проделать с ними любые действия, а после этого войти в комнату с лампочками и проделать любые действия с ними, после чего дать ответ.

5. Занятие 25 октября 1995

5.1. Из города А в город Б ведут 2 дороги, из города Б в город В ведут 3 дороги, из города В в город Г ведут 7 дорог. Сколько различных маршрутов ведут из А в В через Б? Сколько различных маршрутов ведут из А в Г через Б и В?

5.2. Прямоугольник 7×9 разбит на клетки 1×1. Требуется закрасить 4 клетки, образующие квадрат 2×2. Сколькими разными способами можно выбрать такой квадрат?

5.3. Сколько существует четырёхзначных чисел, все цифры которых нечётны?

5.4. Прямогольный город 5×7 разбит на квадратные кварталы 1×1. Мы хотим пройти из юго-западного угла в северо-восточный, идя на север и на восток. Все возможные пути имеют одинаковую длину. (Почему?) Сколько различных путей существует?

5.5. Ветер дует на север. В какую сторону развевается флаг, закреплённый на воздушном шаре?

5.6. Заменить во фразе

И ВСЕ ЖЕ ОН НЕ ПРАВ

каждую из десяти букв И, В, С, Е, Ж, О, Н, П, Р, А одной из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (разные буквы заменяются на разные цифры) так, чтобы все слова превратились в десятичные записи точных квадратов.

6. Занятие 1 ноября 1995

6.1. На прямой выбраны две точки A и B на расстоянии 10. Где на прямой может находиться точка C, если известно, что расстояние AC в полтора раза больше расстояния BC? (Указать все варианты.)

6.2. Может ли сторона треугольника быть вдвое больше другой стороны и вдвое меньше третьей?

6.3. Земной шар обвязали по экватору верёвкой. Затем верёвку удлинили на метр и приподняли над экватором так, что образовалась щель постоянной ширины. Сможет ли в эту щель пролезть кошка?

6.4. На сколько частей делят пространство плоскости, являющиеся гранями куба? тетраэдра (треугольного молочного пакета)?

6.5. Почему крышки канализационных люков делают круглыми, а не овальными или квадратными?

6.6. На конце верёвки сделаны петли, надетые на запястья (не туго, но с рук они не снимаются). Можно ли, не развязывая верёвку (и тем самым не снимая её с рук), завязать на ней узел?

7. Занятие 15 ноября 1995

7.1. В Вестляндии 64 города. Докажите, что в каких-то трёх из них число дождливых дней в октябре было одинаково.

7.2. Какое наибольшее число (а) ладей; (б) слонов можно поставить на шахматную доску так, чтобы они не били друг друга?

7.3. Может ли кот Леопольд подарить 10 мышатам конфеты, если он хочет, чтобы каждый получил хотя бы одну конфету, никакие два мышонка не получили одинакового числа конфет и всего у него (а) 15 конфет; (б) 50 конфет; (в) 100 конфет?

7.4. Докажите, что в любой компании найдутся два человека, имеющих равное число знакомых в этой компании. (Знакомства симметричны: если А знаком с Б, то Б знаком с А.)

7.5. Есть несколько алмазов и мензурка с делениями. Как измерить суммарный объем всех алмазов?

7.6. Имеются три карандаша и нитки. Сделать из них «жёсткую» конструкцию, в которой карандаши не касались бы друг друга (даже через слой ниток), но удерживались бы нитками в определённом положении друг относительно друга.

8. Занятие 22 ноября 1995

8.1. Правила хорошего тона запрещают женщине стоять первой в очереди, а мужчине стоять перед женщиной. Может ли в очереди, где все правила соблюдены, оказаться женщина?

8.2. Любую сумму денег, начиная с 8 копеек, можно уплатить пятаками и алтынами. Почему? (Пятак — пять копеек, алтын — три копейки; это старинные русские монеты.)

8.3. На плоскости нарисовано несколько окружностей, любые две из которых пересекаются. Доказать, что такую фигуру можно обвести карандашом, не отрывая его от бумаги, не проходя ни по одному участку дважды и не пропустив ни одного участка.

8.4. В последовательности $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$ каждое следующее число равно сумме двух предыдущих. (а) Могут ли в ней оказаться рядом два чётных числа? (б) два числа, делящихся на 13?

8.5. Выключатель имеет три контакта 1, 2 и 3 и два положения. В одном положении контакт 1 соединён с контактом 2, а в другом положении контакт 1 соединён с контактом 3. Как, имея два таких выключателя и много провода, сделать так, чтобы свет на лестнице можно было включать и выключать и сверху, и снизу?

8.6. На берегу реки крестьянин, волк, коза и капуста. Волк, оставленный с козой без крестьянина, её съедает — в свою очередь, коза съедает капусту, оставшись с ней без присмотра. Как крестьянину перевезти всех на другой берег, если в лодку можно взять только один из трех объектов (за раз)?

9. Занятие 29 ноября 1995

9.1. Не пользуясь калькулятором, скажите, какая из дробей

$$\frac{13}{21} \quad \text{и} \quad \frac{21}{34}$$

больше. Можете ли вы указать дробь, которая по величине находится между ними?

Обыкновенную дробь m/n называют сократимой, если её можно сократить, то есть нацело разделить числитель и знаменатель на одно и то же целое число (большее 2).

9.2. Сократимы ли дроби:

$$\frac{39}{57}; \qquad \frac{6}{1357}; \qquad \frac{1363}{1357} = 1\frac{6}{1357}\ ?$$

9.3. При каких n и на что можно сократить дроби

$$\frac{n+6}{n}; \qquad \frac{n+19}{n+13}; \qquad \frac{5n+3}{3n+2}\ ?$$

9.4. Найти сумму

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{99\cdot 100}$$

(Указание. Начните складывать.)

9.5. Имеются неверные чашечные весы (плечи неодинаковой длины, так что для равновесия на одну чашку надо класть больше, чем на другую), правильная килограммовая гиря и мешок сахарного песка. Как отвесить килограмм сахарного песка?

9.6. Профессор в командировке, а сын отца профессора пьёт дома чай с отцом сына профессора. Как такое может быть?

10. Занятие 6 декабря 1995

10.1. Можно ли разрезать фигуру, изображенную на рис. 10.1, на две, на три и на четыре одинаковые части?

10.2. Можно ли прямолинейным разрезом поделить одновременно пополам прямоугольный кусок хлеба и лежащий на нем круглый кусок колбасы (рис. 10.2)? Сколькими способами это можно сделать?

10.3. Все грани кубика размером $3 \times 3 \times 3$ покрасили. Потом его разрезали на 27 кубиков размером $1 \times 1 \times 1$. Сколько при этом получилось кубиков со всеми неокрашенными гранями? с одной окрашенной гранью? с двумя окрашенными гранями? с тремя окрашенными гранями? с четырьмя окрашенными гранями?

10.4. Внутри квадрата размером 1×1 поставлено 105 точек. Докажите, что среди них найдутся две точки, расстояние между которыми не больше 0,2.

10.5. Как изменится внутренний диаметр кольца (рис. 10.3) при нагревании?

10.6. 6. Можно ли двумя прямолинейными разрезами рассечь подкову (рис. 10.4) на шесть частей (части между разрезами перекладывать запрещается)?

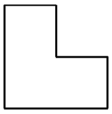
Рис. 1

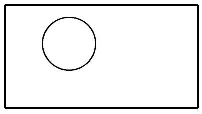
Рис. 2

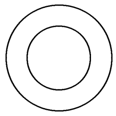
Рис. 3

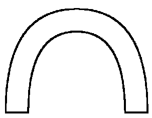
Рис. 4

11. Занятие 13 декабря 1995

11.1. Учительница задала на дом задачу: проверить, делится ли некоторое число на 2, 3 и 6. На следующем уроке Вова сказал: «Я забыл, какое число задали, и делил другое, два раза остатка не было, на третий был». Учительница сказала: «Ты ошибся». Почему она так сказала?

11.2. Делится ли на 7 сумма двух слагаемых, если (а) оба слагаемых делятся на 7; (б) ровно одно из них делится на 7? (в) ни одно из них не делится на 7?

11.3. У числа $100! = 1 \times 2 \times \cdots \times 99 \times 100$ посчитали сумму цифр, у суммы снова посчитали сумму цифр, и так поступали до тех пор, пока не получили число из одной цифры. Что это за число?

11.4. Целое число, большее 2, называется простым, если оно не разлагается в произведение двух меньших целых положительных чисел. Докажите, что число 999 991 — не простое.

11.5. Почему трамвайные провода идут не прямо, а зигзагом? Что плохого было бы, если пустить их ровно? (Указание. С троллейбусом этой проблемы нет.)

11.6. Можно ли расположить 6 длинных круглых карандашей так, чтобы каждый из них касался всех остальных?

12. Занятие 20 декабря 1995

12.1. Вася влил стакан кислоты в банку с водой. Получился 10-процентный раствор кислоты в воде. Потом он добавил в раствор ещё один такой же стакан кислоты. Какой раствор получился в результате?

12.2. Сколько раз в сутки стрелки часов образуют прямой угол?

12.3. (а) Найдите сумму всех чётных четырехзначных чисел. (б) Найдите сумму всех четырехзначных чисел, все цифры которых чётны.

12.4. Саша утверждает, что при подстановке вместо x в выражение $x^2 + x + 41$ чисел $1, 2, 3, 4, \ldots$ всегда получится простое число. Прав ли он? (Число называется простым, если оно делится только на единицу и само себя.)

12.5. Как измерить толщину нитки, имея катушку с ниткой, карандаш и линейку с сантиметровыми делениями?

12.6. Турист вышел из своей палатки, прошел 5 км на юг, 5 км на восток и 5 км на север, после чего снова оказался у своей палатки. Где такое могло произойти?

13. Занятие 27 декабря 1995

13.1. Как расставить 5 бутылок по 6 подносам так, чтобы на каждом подносе было по одной бутылке?

13.2. Простое число — это число, которое не разлагается в произведение двух меньших целых чисел. (Например, 7 — простое число, а $10 = 2 \times 5$ — нет.) Докажите, что полусумма двух соседних нечётных простых чисел — составное число.

13.3. Известно, что $57 = 2^5 + 5^2$. Найдите аналогичное разложение числа 5757 (т.е. такие целые числа c и d, что $5757 = c^d + d^c$).

13.4. Продолжите последовательность: 4, 3, 3, 6, 4, 5, 4, 6, 6, 6, 11 . . . .

13.5. Петя стоит на балконе 2-го этажа, а Вася — на балконе 5-го этажа того же дома. В некоторый момент они одновременно выкрикивают слово «раз». Оказалось, что Петя услышал васино слово немного раньше, чем Вася — петино. Почему?

13.6. Три черепахи участвовали в кроссе. Первая сказала: «Я пришла к финишу раньше второй.» Вторая сказала: «Я пришла к финишу раньше третьей.» Третья сказала: «Я пришла к финишу раньше первой.» Как такое может быть?

* * *

13.7. Почему парикмахер в Женеве охотнее побреет двух французов, чем одного немца?

13.8. Проделайте в тетрадном листе отверстие, в которое может пролезть человек.

13.9. Нарисуйте фигуру из 11 точек и нескольких отрезков между ними так, чтобы каждая точка была соединена ровно с двумя другими.

13.10. При всех целых x число $ax^2 + bx + c$ целое. Можно ли утверждать, что числа a, b, c — целые?

14. Домашняя олимпиада

14.1. Можно ли так расположить в пространстве три одинаковых кубика, чтобы сверху, сбоку и спереди была видна одна и та же фигура — три квадрата, приложенных друг к другу сторонами (буквой «Г»)?

14.2. Что больше: общее количество цифр в числах $1, 2, 3, \ldots, 999, 1000$ или количество нулей в числах $1, 2, 3, \ldots, 9999, 10000$?

14.3. Сколько раз входит 2 в разложение на простые сомножители числа $100 \cdot 101 \cdot 102 \cdot 103 \cdot \ldots \cdot 199 \cdot 200$?

14.4. Некоторые целые числа объявлены хорошими, остальные — плохими. Известно, что (а) если x хорошее, то $x + 15$ тоже хорошее; (б) если x плохое, то $x + 6$ тоже плохое. Сколько плохих чисел может быть среди чисел от 1 до 1000? Укажите все варианты и докажите, что других быть не может.

14.5. Японские названия некоторых годов по традиционному восточному календарю: каното уси (1901), хиноэ ума (1966), цутиноэ ума (1978), цутиното хицудзи (1979), каноэ сару (1980), хиноэ тора (1986), цутиното ми (1989), мидзуноэ ума (2002), мидзуното хицудзи (2003), хиноэ ума (2026). (а) Запишите названия годов 1991, 1993, 1997. (б) Через сколько лет наступит ближайший год хиноэ сару? каното ми? мидзуноэ уси?

15. Занятие 17 января 1995

15.1. В Москве живёт более 5 миллионов человек. Вася купил карту масштаба $1 : 100\,000$, расстелил её на земле и думает, что на неё встанут 50 человек ($50 = 5\,000\,000/100\,000$). Прав ли он?

15.2. Можно ли замостить плоскость одинаковыми (а) треугольниками; (б) четырехугольниками; (в) пятиугольниками; (г) шестиугольниками; (д) семиугольниками?

15.3. Сколько нужно провести непересекающихся диагоналей в 100-угольнике, чтобы разрезать его на треугольники? Почему всегда получается одно и то же число диагоналей?

15.4. На прямой дороге стоят 6 домов на равных расстояниях друг от друга. В каком месте дороги надо сделать автобусную остановку, чтобы суммарное расстояние от неё до всех домов было бы как можно меньше?

15.5. Мерный цилиндр заполнен водой. Перевёрнутая пробирка, частично заполненная водой, плавает в толще воды. Почему она опускается, если нажать на резиновую плёнку, затягивающую отверстие цилиндра?

15.6. (а) Разрезать тупоугольный треугольник на остроугольные. (б) Разрезать квадрат на остроугольные треугольники.

16. Занятие 24 января 1995

16.1. Являются ли старейший художник среди шахматистов и старейший шахматист среди художников одним и тем же лицом — или это не обязательно? Являются ли лучший шахматист среди художников и лучший художник среди шахматистов одним и тем же лицом?

16.2. Петя задумал число от 1 до 1000. Вася хочет узнать это число, задавая Пете вопросы, на которые возможны ответы «да» и «нет». Какие вопросы он должен задавать, чтобы гарантированно узнать задуманное число после 10 вопросов? Может ли он сделать то же самое, если список из 10 вопросов он должен составить заранее?

16.3. Сумма углов треугольника всегда равна 180°. Чему равна сумма углов пятиугольника? Чему равна сумма углов пятиконечной звезды?

16.4. Из утверждений «$x > 1$», «$x > 2$», «$x > 3$», «$x > 4$», «$x > 5$» три верных и два неверных. Какие?

16.5. Почему не горит бумажная коробочка, в которой кипятят воду?

16.6. Царь вызвал двух мудрецов, дал каждому из них карточку (так, чтобы другой её не видел), и сказал: «У каждого из вас на карточке написано целое положительное число, причём эти числа отличаются на единицу». После этого царь спросил первого мудреца: «Какое у второго число?». — «Не знаю», — ответил первый. Царь спросил второго: «А ты не знаешь, какое число у первого?». — «И я не знаю», — ответил второй. И снова спросил царь первого, и снова тот ответил, что не знает. После этого он спросил второго, и тот сказал, какое число у первого. Какие числа могли быть на карточках и как рассуждал второй?

17. Занятие 31 января 1996

17.1. Что случится с периметром и площадью прямоугольника, если одну его сторону увеличить на 10 процентов, а другую уменьшить на 10 процентов?

17.2. Двое лыжников шли друг за другом с постояннной скоростью 6 км/ч на расстоянии 200 метров. (**а**) Начался более трудный участок, где на котором скорость лыжников стала 4 км/ч. Каково расстояние между лыжниками на этом участке? (**б**) Затем был лёгкий участок со скоростью 7 км/ч, затем очень трудный со скоростью 3 км/ч и, наконец, они вышли снова на участок со скоростью 6 км/ч. Каково расстояние между ними в этот момент?

17.3. На столе лежат четыре карточки, на которых сверху написано: А, Б, 4, 5. Какое наименьшее количество карточек и какие именно нужно перевернуть, чтобы проверить истинность утверждения «Если на одной стороне карточки четное число, то на другой — гласная буква»?

17.4. Из Москвы во Владивосток ежедневно ровно в полночь (по московскому времени) выходит поезд, который идет ровно 6 суток. Из Владивостока в Москву ежедневно в полдень (по московскому времени) выходит поезд, который идет также 6 суток. Когда поезда встречаются, машинисты кричат «Ура!». (а) Сколько раз машинист кричит «Ура!» на пути из Москвы во Владивосток? (б) Сколько криков «Ура!» раздается в течение суток? Наконец, (в) сколько железнодорожных составов нужно, чтобы организовать такое движение?

17.5. У катушки, изображенной на рис. 17.1, внутренний диаметр равен 1 см, а внешний — 2 см. Катушка катится со скоростью 30 см/с. С какой скоростью для этого человек должен тянуть конец нитки?

17.6. Вася приходит на станцию метро в случайное время и садится в первый пришедший поезд (либо в одну сторону — в школу, либо в другую — в кино). Хотя поезда ходят точно по расписанию, и в обе стороны идет примерно одинаковое число поездов, получается так, что Вася в школу попадает в среднем в три раза реже, чем в кино. Как так может быть?

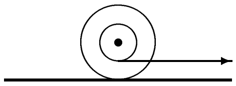

Рис. 1

18. Занятие 7 февраля 1996

18.1. На клетчатой бумаге нарисован прямоугольник шириной 8 клеток и высотой 6 клеток. Можно ли поставить в нём крестики так, чтобы (а) в каждой строке стояло 4 крестика, а в каждом столбце — 3? (б) в каждой строке стояло 3 крестика, а в каждом столбце — 2?

18.2. В строчку написаны 10 чисел, причём сумма любых трёх соседних равна 15. Первое число равно 7. Чему может быть равно последнее число?

18.3. В мешке лежит 57 чёрных фасолин и 43 белых. Борис Петрович вынимает из мешка наугад две фасолины. Если они оказываются одного цвета, то он заменяет их на белую фасолину, если разного — то на чёрную. Так он делает до тех пор, пока в мешке не останется только одна фасолина. Какого цвета она будет?

18.4. Квадратная площадь размера 50×50 метров выложена плитами размера 1×1 четырёх цветов — белого, красного, синего и зелёного. При этом плиты одного цвета не лежат рядом и не имеют общего угла. Сколько красных плит на площади?

18.5. Стакан наполнили водой, накрыли картонкой и перевернули. Почему вода не выливается?

18.6. Бизнесмен заключил с чёртом следующее соглашение: каждый день бизнесмен даёт чёрту одну купюру, а взамен получает любое (указанное бизнесменом) число купюр меньшего достоинства. Может ли бизнесмен бесконечно долго выполнять свои обязательства, если другого источника денежных купюр у него нет?

19. Занятие 14 февраля 1996

19.1. Володя и Лёша играют в крестики на доске 3×3 по таким правилам: ходят по очереди, ставя крестик в любую свободную клетку. Проигрывает тот, кто не может сделать ход (некуда). Первым ходит Володя. Кто выиграет?

19.2. Дима и Сэм играют в такую игру. Вначале ладья стоит в левом нижнем углу шахматной доски. Ходят по очереди. На каждом ходу ладью можно сдвинуть или вправо, или вверх (на любое число клеток). Проигрывает тот, кто не может сделать ход (ладья в правом верхнем углу). Первым ходит Дима. Кто выигрывает при правильной игре?

19.3. Боря и Игорь играют в такую игру. На столе лежат две кучки спичек по 7 спичек в каждой. Ходят по очереди. За один ход можно взять любое число спичек (хоть все), но только из одной кучки. Выигрывает тот, кто взял последнюю спичку. Боря начинает. Кто выиграет при правильной игре?

19.4. На доске написано число 100. Таня и Оля ходят по очереди. За один ход разрешается уменьшить написанное на доске число на 1, 2 или 3. У кого получится отрицательное число, проиграл. Первой ходит Таня. Кто выиграет?

19.5. Андрей и Рома играют в азартную игру. Каждый из них пишет на бумажке целое число, не показывая другому. Затем они открывают бумажки, складывают числа и смотрят, делится ли сумма на 3. Если делится, то Рома платит Андрею 3 рубля, если нет, Андрей платит Роме 2 рубля. Кому выгодна эта игра? Как надо изменить её правила, чтобы игра была честной?

19.6. Бизнесмен договорился о партии в шахматы по переписке с двумя гроссмейстерами. Он похваляется своему приятелю: «Ну уж у одного я точно выиграю. В крайнем случае, будут две ничьи». Почему он в этом так уверен?

20. Занятие 21 февраля 1996

20.1. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску (а) белую и черную ладьи, не бьющие друг друга? (б) две белые ладьи, не бьющие друг друга? (В чём разница между этими задачами?)

20.2. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску 8 одинаковых ладей, не бьющих друг друга?

20.3. В классе 20 учеников. Было проведены две контрольные, за каждую из которых ставились отметки от 2 до 5 (не участвовавшие получили двойки). Доказать, что есть два ученика с одинаковыми результатами (по обеим контрольным).

20.4. Каких чисел больше среди чисел от 000000 до 999999 — тех, у которых сумма цифр чётна или тех, у которых она нечётна? Сколько тех и других?

20.5. Посмотрите на ключ от своей квартиры. Объясните, как работает замок. Как Вы думаете, могут ли все замки в новом 500-квартирном доме (выпущенные одной фирмой) быть разными?

20.6. Фирма «Русский сувенир» обнаружила в результате «марке́тинга», что многие граждане хотели бы иметь на память десятитысячную купюру, номер на которой совпадает с их телефонным номером. Но их начальный капитал недостаточен, чтобы приобрести купюры со всеми возможными номерами. Тем не менее фирма нашла выход из положения. Какой?

21. Занятие 28 февраля 1996

21.1. Любая из сторон первого треугольника больше любой стороны второго треугольника, а площадь второго больше площади первого. Может ли так быть?

21.2. Двузначное число написали подряд три раза. (Например, из числа 67 получилось число 676767. Полученное число всегда делится на 7, 13 и на 111. Почему?

21.3. Можно ли из квадрата со стороной 1 вырезать несколько кругов, сумма диаметров которых больше 1996?

21.4. Мышка грызёт куб сыра с ребром 3, разбитый на 27 единичных кубиков, кубик за кубиком. Когда мышка съедает какой-либо кубик, она переходит к другому кубику, имеющему общую грань с предыдущим. Может ли мышка съесть весь куб, кроме центрального кубика?

21.5. Имеется кирпич, карандаш, лист бумаги и линейка с делениями. Как найти найти длину большой диагонали кирпича (расстояние между противоположными вершинами)?

21.6. Миша горько плачет: «Ну почему мне так не повезло с днём рождения! Я уж и не помню, что мне дарили в прошлый раз ... » В чём его беда?

22. Занятие 6 марта 1996

22.1. В турнире по крестикам-ноликам по олимпийской системе участвует миллион (1 000 000) игроков. Сколько партий будет сыграно в этом турнире? (В турнире по олимпийской системе проигравший выбывает.)

22.2. Мистер и миссис Смит по очереди переводят стрелку часов на два или три часа вперёд. Сначала стрелка показывала 1 час. Тот, после чьего хода стрелка показала 5 часов, считается победителем; другой считается проигравшим и идёт готовить чай. Верно ли, что мистеру Смиту не придётся готовить чай, если он уступит право первого хода миссис Смит и будет играть правильно?

22.3. Володя и Сева по очереди пишут кладут на прямоугольный стол круглые монеты (все монеты одинаковы). Уже лежащие монеты сдвигать нельзя; класть монету поверх других — тоже. Кто не может положить монету так, чтобы она не упала со стола, проигрывает. Первым ходит Володя. Кто выигрывает при правильной игре?

22.4. Натуральные числа раскрашены в два цвета. Докажите, что можно так выбрать три числа A, B и C одного цвета, что $A + B = 2C$.

22.5. Дальтоники не различают цветов. Могут ли они пользоваться светофором? Если да, то почему ГАИ неохотно выдаёт им права?

22.6. Три разбойника делят между собой большой пирог. Каждый из них мог бы разрезать пирог на три равные части, но остальные ему не доверяют. «Если бы нас было двое, — говорит один из разбойников, — то один разрезал бы пирог на две части, а второй выбрал одну из частей, и каждый был бы уверен, что получил не меньше половины». Предложите разбойникам способ поделить пирог так, чтобы каждый был уверен, что ему досталось не меньше трети.

23. Задание 13 марта 1996

23.1. Изменятся ли частное и остаток, если делимое и делитель увеличить в три раза?

23.2. Можно ли так написать на шести гранях кубика числа от 1 до 6, чтобы числа на соседних гранях не были соседними (то есть отличались бы на 2 или больше)?

23.3. На плоскости нарисовано 1000 точек. Всегда ли можно провести прямую так, чтобы по каждую сторону от неё было ровно 500 точек?

23.4. На окружности поставлено (в некотором порядке) 10 красных точек и 10 синих. Доказать, что число пар соседних красных точек равно числу пар соседних синих точек.

23.5. Маховик подвешен на двух нитках, намотанных на ось. Его отпускают, и он движется вниз, раскручиваясь. Дойдя донизу, он начинает подниматься вверх. Почему?

23.6. У Димы было 7 картофелин, у Гриши было 5, а у Яши вообще не было. Они сварили картошку и разделили полученную тюрю поровну на троих. Благодарный Яша дал Диме с Гришей 12 конфет. Как они должны поделить их по справедливости?

24. Занятие 20 марта 1996

24.1. Сумма уменьшаемого, вычитаемого и разности равна 25. Найдите уменьшамое.

24.2. Передние покрышки автомобиля стираются через 25000 км пути, а задние через 15000 км пути. Сколько можно проехать, если вовремя поменять покрышки местами, чтобы они стёрлись одновременно? В какой момент их нужно менять? (Считается, что в передних и задних колёсах стирается одна и та же часть покрышки, причём стирается она равномерно.)

24.3. Можно ли нарисовать многоугольник и точку внутри него, из которой ни одна сторона многоугольника не видна целиком?

24.4. Можно ли нарисовать многоугольник и точку вне него, из которой ни одна сторона многоугольника не видна целиком?

24.5. На столе лежала верёвка (без узла). Лёня подошел к столу, взял веревку за концы двумя руками, и, не выпуская концов верёвки из рук, завязал на ней узел. Как он это сделал?

24.6. Среди любых трёх школьников 7а класса хотя бы один играет в компьютерные игры. Преподаватели решили выгнать всех, кто играет в компьютерные игры. Сколько школьников останется, если это решение выполнить?

25. Собеседование 27 марта 1996

Письменная работа (требуется ответ с кратким обоснованием)
Калькулятором пользоваться нельзя

Вариант 1

25.1. Найдите минимальное целое число, большее 40 100 и являющееся точным квадратом (квадратом другого целого числа).

25.2. Какой угол образуют минутная и часовая стрелки в 11 часов 20 минут?

25.3. Найдите положительное целое число n, если известно, что

$$(n+2)(n+3)(n+5)(n+7) = 4\,158.$$

25.4. Числа a, b, c, d, e положительны. Известно, что $ab = 2$, $bc = 3$, $cd = 4$, $de = 5$. Чему равно e/a?

25.5. Каждую сторону прямоугольника увеличили на 3 см; в результате его площадь увеличилась на 39 см^2. Найдите периметр исходного прямоугольника.

25.6. Как замостить плоскость одинаковыми плитками (рис. 25.1), имеющими вид квадрата с отрезанным углом? (Нарисуйте подробную схему укладки плит.)

25.7. Верёвку сложили пополам, потом ещё раз пополам, потом снова пополам, а потом разрезали в каком-то месте. (Режут не на сгибе и сразу все нити.)

(а) Сколько кусочков получилось?

(б) Два из этих кусочков имели длину 7 см и 3 см. Какова длина верёвки? Укажите все возможности.

25.8. В треугольнике ABC угол B равен $20°$, угол C равен $40°$. Биссектриса AD угла A равна 2. Найти разность сторон $BC - AB$. (Подсказка. На стороне BC постройте точку E, для которой угол AEB равен $80°$.)

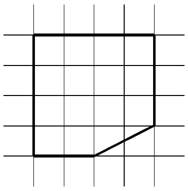

Рис. 1

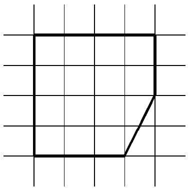

Рис. 2

Вариант 2

25.9. Найдите наименьшее целое число, большее 10 100, которое является точным квадратом (квадратом другого целого числа).

25.10. Какой угол образуют минутная и часовая стрелки в 12 часов 20 минут?

25.11. Известно, что $(n+3)(n+5)(n+7)(n+11) = 4\,095$. и что n — целое положительное число. Найдите его.

25.12. Числа a, b, c, d, e положительны. Известно, что $ab = 3$, $bc = 2$, $cd = 4$, $de = 5$. Найти отношение a/e.

25.13. Каждую сторону прямоугольника увеличили на 2 м; в результате его площадь увеличилась на 28 м^2. Найдите периметр исходного прямоугольника.

25.14. Как замостить плоскость одинаковыми плитками (рис. 25.2), имеющими вид квадрата с отрезанным углом? (Нарисуйте подробную схему укладки плит.)

25.15. Верёвку сложили пополам, потом ещё раз пополам, потом снова пополам, а потом разрезали в каком-то месте.

(а) Сколько кусочков получилось?

(б) Два из этих кусочков имели длину 9 см и 4 см. Какова длина верёвки? Укажите все возможности. (Режут не на сгибе и сразу все нити.)

25.16. В треугольнике ABC угол B равен $40°$, угол C равен $20°$, разность сторон $BC-AC$ равна 4. Найти длину биссектрисы угла A. (Подсказка. Возьмите на стороне BC точку E, для которой угол AEB равен $100°$.)

26. Собеседование 3 апреля 1996

Письменная работа (требуется ответ с кратким обоснованием)
Калькулятором пользоваться нельзя

Вариант 1

26.1. Какое число (одно и то же) надо прибавить к числителю и знаменателю дроби $11/41$, чтобы она обратилась в $3/8$?

26.2. (а) Найдите минимальное пятизначное число, делящееся на 123. (б) Сколько существует пятизначных чисел, делящихся на 123? (Пятизначные числа — это числа от 10 000 до 99 999.)

26.3. Автомат отрезает от помещённого в него прямоугольника квадрат со стороной, равной меньшей из сторон прямоугольника. Применяя несколько раз подряд этот автомат к имевшемуся у него прямоугольнику, Вася в конце концов разрезал его на 2 больших квадрата, 3 квадрата поменьше и 5 маленьких квадратов со стороной 1 см. Какой прямоугольник у него был?

26.4. Вычислите произведение, приведя подобные члены:

$$(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)$$

26.5. В треугольнике ABC на стороне AB взята точка D, а на стороне BC взята точка E. При этом отрезок DE параллелен AB и равен по длине отрезку AD. Найдите угол EAB, если углы B и C треугольника равны соответственно 45° и 60°.

26.6. Как замостить плоскость одинаковыми плитками (рис. 26.1)? Плитки нельзя переворачивать другой стороной. (Нарисуйте подробную схему укладки плиток.)

26.7. (а) Найдите положительное число (не обязательно целое), при делении которого на $10/21$ и $4/15$ в частном получаются целые числа. (б) Найдите ***наименьшее*** такое число.

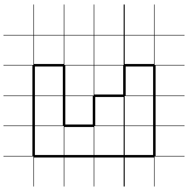

Рис. 1

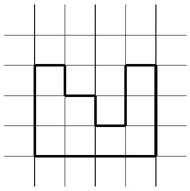

Рис. 2

Вариант 2

26.8. Какое число (одно и то же) надо прибавить к числителю и знаменателю дроби $36/91$, чтобы она обратилась в $4/9$?

26.9. (а) Найдите минимальное пятизначное число, делящееся на 213. (б) Сколько существует пятизначных чисел, делящихся на 213? (Пятизначные числа — это числа от 10 000 до 99 999.)

26.10. Автомат отрезает от помещённого в него прямоугольника квадрат со стороной, равной меньшей из сторон прямоугольника. Применяя несколько раз подряд этот автомат к имевшемуся у него прямоугольнику, Вася в конце концов разрезал его на 3 больших квадрата, 2 квадрата поменьше и 6 маленьких квадратов со стороной 1 см. Какой прямоугольник у него был?

26.11. Вычислите произведение, приведя подобные члены:

$$(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)$$

26.12. В треугольнике ABC на стороне AB взята точка D, а на стороне AC взята точка E. При этом отрезок DE параллелен BC и равен по длине отрезку EC. Найдите угол ABC, если углы BAC и BCD равны соответственно 55° и 25°.

26.13. Как замостить плоскость одинаковыми плитками (рис. 26.2)? Плитки нельзя переворачивать другой стороной. (Нарисуйте подробную схему укладки плиток.)

26.14. (а) Найдите положительное число (не обязательно целое), при делении которого на $15/8$ и $21/10$ в частном получаются целые числа. (б) Найдите ***наименьшее*** такое число.

27. Собеседование 6 апреля 1996

27.1. Каким днём недели было 6 апреля 1957 года? В году 365 дней, если он не високосный (366 дней); високосные годы — это те, которые делятся на 4 (исключения бывают только в начале столетий).

27.2. В четырёхугольнике $ABCD$ продолжения противоположных сторон AB и CD пересекаются под углом 20°; продолжения противоположных сторон BC и AD также пересекаются под углом в 20°, Доказать, что два угла в этом четырёхугольнике равны, а два других отличаются на 40°.

27.3. Двое пловцов одновременно начали плыть по 25-метровой дорожке бассейна со скоростями $1,4$ м/с и $1,1$ м/с. Доплывая до конца дорожки, каждый из пловцов поворачивает назад. Когда более быстрый пловец впервые обгонит более медленного (плывя в ту же сторону)? На каком расстоянии от места старта это произойдёт?

27.4. Квадратное колесо катится по дороге. Нарисовать траекторию его оси (находящейся в центре колеса). Из каких кривых она состоит?

27.5. Сумма трех различных чисел (не обязательно целых) равна 10, а разница между большим и меньшим из них равна 2. Каким может быть среднее по величине число?

* * *

27.6. Река с параллельными прямыми берегами имеет ширину 100 метров. На одном из берегов реки есть пристань. Есть остров периметра 800 метров; других островов нет. Доказать, что можно доплыть от пристани до другого берега реки, проплыв не более 300 метров (минуя остров).

27.7. Квадрат разрезан на 5 прямоугольников, четыре из которых имеют по одному общем углу с квадратом и равновелики друг другу, а пятый находится внутри квадрата (не имея с ним общих кусков сторон). Доказать, что он будет квадратом.

28. Собеседование 10 апреля 1996

28.1. В каких пределах могут находиться сумма $a+b$, разность $a-b$, произведение $a \cdot b$ и частное a/b, если $6 < a < 7$ и $2 < b < 3$?

28.2. На столе в ряд стоят банки объёмом 1 литр, $1/2$ литра, $1/3$ литра, $1/4$ литра, $\ldots$, $1/100$ литра. Первая из них полна воды, остальные пустые. Из первой банки переливают воду (сколько поместится) во вторую, затем из второй в третью, из третьей в четвёртую и т.д. (на последнем шаге последняя банка будет наполнена доверху). Сколько воды окажется в каждой из банок? Найти общее количество воды в первых 50 банках после всех переливаний.

28.3. Процессия движется из пункта А в пункт Б со скоростью 5 км/ч. Каждые полчаса высылаются гонцы в пункт Б, которые движутся со скоростью 20 км/ч. С какими интервалами прибывают гонцы в Б?

28.4. Квадратный пруд имеет сторону 500 метров. На одной из его сторон выбрана точка, отстоящая от одного угла на 200 метров и от другого угла на 300 метров. Нарисовать точки, до которых можно дойти, пройдя не более 900 метров по суше. Из каких кривых состоит граница получившейся области?

28.5. Работа была поделена поровну между работниками в бригаде. После первого дня посчитали, сколько человек выполнило не менее 30% своей доли — таких оказалось 70% всех работающих. Когда стали считать только тех, кто выполнил не менее 70% своей доли — таких оказалось 30% работавших. Можно ли быть уверенным, что выполнена хотя бы треть работы?

* * *

28.6. Человек приехал на станцию на час раньше обычного и не стал ждать посланную за ним машину, а пошёл ей навстречу, встретил, сел и приехал на 20 минут раньше обычного. Сколько минут он шёл пешком? (Скорости человека и машины постоянны.)

28.7. Грани куба $2 \times 2 \times 2$ раскрашены в несколько цветов (каждый из четырёх квадратиков каждой грани — в один из цветов). При этом квадратики, имеющие общую сторону (в том числе находящиеся на разных гранях) имеют разные цвета. Какое максимальное количество квадратиков одного цвета может быть? Какое минимальное число цветов может быть использовано?

29. Собеседование 13 апреля 1996

29.1. На доске написаны числа $1, 2, 3, \ldots, 1996$. Вася вычеркнул каждое десятое число, считая от начала (т.е. $10, 20, 30, \ldots$). После этого он вычернул каждое девятое число из оставшихся, затем каждое восьмое, каждое седьмое, ..., каждое второе. Сколько чисел останется? Какое число будет стоять на последнем месте?

29.2. Докажите равенство:

$$\frac{1}{1 \cdot 199} + \frac{1}{3 \cdot 197} + \frac{1}{5 \cdot 195} + \ldots + \frac{1}{197 \cdot 3} + \frac{1}{199 \cdot 1} = \frac{1}{100}(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{199})$$

29.3. В выражении $(a+b-c)(d-e-f)(g-h+i)(k+l+m)$ раскрыли скобки. Сколько членов получится? Перед сколькими из них будет стоять знак минус?

29.4. В треугольнике ABC угол A равен $60°$. Известно, что биссектриса угла A, медиана, проведённая из вершины B, и высота, опущенная из вершины C, пересекаются в одной точке. Докажите, что треугольник равносторонний.

29.5. На плоскости лежит картонный квадрат, который разрешается перекатывать через рёбра (при перекатывании ребро остаётся на месте, а квадрат переворачивается на другую сторону). После нескольких перекатываний квадрат вернулся в то же место плоскости. Докажите, что он оказался в прежнем положении (т.е. все его вершины оказались на исходных местах).

30. Собеседование 17 апреля 1996

30.1. Докажите, что сумма дробей $1/1000 + 1/1001 + 1/1002 + \ldots + 1/1999 + 1/2000$ не меньше $1/2$. (б) Тот же вопрос для суммы $1/1000 + 1/1001 + 1/1002 + \ldots + 1/1995 + 1/1996$.

30.2. Найдите самое большое натуральное число, при делении которого с остатком на 57 частное и остаток получаются равными.

30.3. Известно, что $a/b = c/d$. Докажите, что $(a-b)/(a+b) = (c-d)/(c+d)$.

30.4. В треугольнике ABC взяли точку D на стороне BC, точку E на стороне AC и точку F на стороне AB. При этом $AF = AE$, $BD = BF$ и $CE = CD$. Известно, что $\angle ABC = 20°$. Найдите угол FED.

30.5. На плоскости нарисовали треугольник и квадрат. Потом покрасили все точки, попадающие внутрь хотя бы одной из фигур. Может ли при этом получиться 7-угольник? 8-угольник? 13-угольник?

* * *

30.6. Восстановите пример:

```
*******|**
***    |**8**
----
   **
   **
   ---
    ***
    ***
    ---
      0
```

30.7. Может ли получиться 14-угольник в задаче 5?

31. Собеседование 20 апреля 1996

31.1. Собака преследует зайца, который находится на расстоянии 40 своих прыжков впереди собаки. Собака делает 7 прыжков за то же время, что заяц — 9, но 3 прыжка собаки равносильны 5 прыжкам зайца. Сколько прыжков надо сделать собаке, чтобы догнать зайца?

31.2. Известно, что положительные числа x и y таковы, что $x^4 = 37$, $y^3 = 15$. Какое из чисел x и y больше и почему?

31.3. Вася тренируется на катке. Он положил три шайбы в вершины треугольника, а затем бьёт по одной из шайб так, чтобы она (двигаясь по прямой) прошла в ворота, образуемые двумя другими шайбами. Могут ли после 7 бросков все три шайбы оказаться в прежних местах? Могут ли они после 7 бросков оказаться в вершинах того же треугольника?

31.4. 4. Даны две бутылки с растворами разной концентрации. В одной бутылке $0,5$ литра, в другой $0,3$ литра. Два одинаковых стаканчика налили доверху (каждый из своей бутылки), после чего растворы влили обратно в бутылки, поменяв их местами. В результате в обеих бутылках получился раствор одинаковой концентрации. Найти объём стаканчиков.

31.5. Петя и Боря смотрят на большой кусок пчелиных сот. Соты состоят из шестиугольников, примыкающих друг к другу так, что в вершине сходятся три шестиугольника. Петя считает число шестиугольников, Боря — число вершин шестиугольников. У кого из них получится больше? Во сколько раз (примерно)? Почему?

* * *

31.6. По плоскости катают (без проскальзывания) кубик: вправо – вверх – влево – вниз – вправо – вверх – ... Вернётся ли он в исходное положение, и если да, то через сколько раз?

31.7. По кругу стоят 10 корзин. При каких n можно разложить n яблок по этим корзинам так, чтобы количества яблок в соседних корзинах отличались ровно на 1?

32. Собеседование 26 апреля 1996 года (физика)

32.1. Груз прицеплен к безмену, который висит на другом безмене. Сколько весит груз, если безмены показывают 300 и 500 граммов?

32.2. Чтобы завернуть винт, отвёртку крутят по часовой стрелке. В какую сторону нужно крутить гайку, чтобы навернуть её на винт, головка которого вмурована в стену — по часовой стрелке или против?

32.3. Резиновый шарик падает вертикально, крутясь вокруг горизонтальной оси. Отклонится ли он от вертикали, когда отскочит? Если да, до в какую сторону?

32.4. При проигрывании магнитофонной кассеты плёнка движется с постоянной сторостью ($4,77$ см/с). Какая из втулок кассеты крутится быстрее — приёмная или подающая?

32.5. Как движется Солнце с точки зрения жителей Южного полушария — слева направо или справа налево?

32.6. В пятирожковой люстре можно отдельно включать три и два рожка (двумя клавишами выключателя). Нарисовать схему соединения люстры и выключателей с электросетью, учитывая, что из потолка в люстру идут 3 провода.

32.7. Половина симметричной U-образной трубки заполнена водой, половина — подсолнечным маслом (до той же высоты). Что произойдёт, если открыть кран внизу трубки?

32.8. Вася закрыл правый глаз и смотрит в зеркало левым. Он видит муху, сидящую на зеркале, на фоне закрытого правого глаза. После этого он открыл правый глаз и закрыл левый. На фоне чего он теперь увидит муху (которая осталась в той же точке зеркала)? Почему?

32.9. В каких из 8 случаев перепиливания тяжёлого бревна на двух опорах (рис. 32.1) пилу будет зажимать?

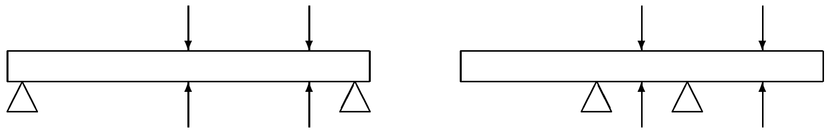

Рис. 1

32.10. Лыжи обычно делают вогнутыми (середина лыжи приподнимается над землёй, когда концы стоят на земле), при этом среднюю часть лыжи обычно намазывают мазью, прилипающей к снегу, а концы — мазью, хорошо скользящей по снегу. Зачем всё это делается?

33. Задачи «малого мехмата»

Параллельно с ВМШ происходили занятия кружка 7 класса в МГУ («малого мехмата»); там давались несколько другие задачи, хотя были и пересечения (в приводимом далее списке общие задачи исключены).

33.1. На столе лежало печенье. Сначала Вася съел половину печенья и еще полпеченья. Потом Гриша съел половину печенья и ещё полпеченья. Потом Боря съел половину печенья и ещё полпеченья. Потом пришла Таня — а печенье всё кончилось. Сколько печенья было вначале?

33.2. Ося пишет последовательность $1, 3, 7, 15, \ldots$ Каждое следующее число получается из предыдущего умножением на 2 и прибавлением 1. Юля прибавляет ко всем его числам по единице и замечает, что получаются степни двойки: $2, 4, 8, 16, \ldots$ Будет ли эта закономерность продолжаться?

33.3. Игра «Ханойские башни» имеет три вертикальных стержня. На один из них надета пирамидка из колец разного размера (меньшие на больших). Как переложить кольца на другой стержень, если перекладывать можно только по одному, большее на меньшее класть нельзя и пирамидка состоит из (а) трёх колец; (б) четырёх колец; (в) произвольного числа колец?

33.4. Круглый торт разрезали ножом по нескольким прямым, и куски дали гостям. После этого выяснили, что одна из сторон ножа была грязной. Доказать, что хотя бы один из гостей получил чистый (со всех сторон) кусок.

33.5. Двузначное число из цифр x и y (то есть $10x + y$) делится на 7 в том и только том случае, если разность между $2y$ и x делится на 7. Почему?

33.6. Участники шахматного турнира сыграли друг с другом по разу, причём ничьих не было. Доказать, что можно составить список участников так, чтобы каждый выиграл у (непосредственно) следующего за ним.

33.7. Володя и Лёша играют в крестики на доске 3×3 по таким правилам: ходят по очереди, ставя крестик в любую свободную клетку. Проигрывает тот, кто не может сделать ход (некуда). Первым ходит Володя. Кто выиграет?

33.8. Имеются шесть чисел a, b, c, d, e, f. Известно, что произведения ac, be, df и ea положительны. Может ли произведение (а) bc; (б) af быть отрицательным?

33.9. Никита расставляет на доске размером 2×6 шахматных коней и хочет, чтобы ни один из них не мог побить другого, как бы они не ходили (конь ходит буквой «Г»). Какое наибольшее число коней он сможет поставить?

33.10. (а) Нарисуйте конверт с откинутым клапаном (рис. 33.1), не отрывая карандаша от бумаги и не рисуя дважды одной и той же линии. (б) Это можно сделать по-разному, но концы траектории карандаша всегда одни и те же. Почему?

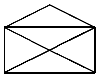

Рис.1

33.11. (а) Можно ли разрезать шахматную доску (8×8) на прямоугольники размером 3×1? (б) Тот же вопрос для доски с вырезанной угловой клеткой.

33.12. Можно ли разрезать шахматную доску (8×8) с вырезанными угловыми клетками $a1$ и $h8$ на прямоугольники размером 2×1?

33.13. Может ли шахматный конь обойти все клетки, начав с $a1$ и закончив в $h8$, побывав на каждой клетке один раз?

33.14. Какое максимальное количество чисел можно выбрать среди чисел от 1 до 100, если среди выбранных не должно быть двух чисел, отличающихся ровно в два раза?

33.15. Можно ли замостить всю плоскость квадратами, среди которых всего два одинаковых?

33.16. (а) Можно ли полосками 1×5 замостить прямоугольник, у которого обе стороны не делятся на 5? (б) Можно ли полосками 1×6 замостить прямоугольник, у которого обе стороны не делятся на 6?

33.17. Электронные часы показывают время от 00: 00 до 23: 59. Они сломались, и цифры минут повторяют цифры часов (04: 04, 05: 05 и т. п.). Какова минимальная разница во времени между двумя показаниями этих часов?

33.18. (а) Никита хочет написать 70 разных двузначных чисел, но не хочет, чтобы два из них давали в сумме 150. Возможно ли это? (б) Тот же вопрос, если в сумме не должно получаться 130.

33.19. Докажите, что из любых 95 натуральных чисел можно выбрать два, разность которых делится на 94.

33.20. Дано 5 чисел; сумма любых 3 из них четна. Доказать, что все числа чётны.

33.21. Из чисел $1, 2, 3, 4, \ldots, 19, 20$ выбрали 11. Доказать, что одно из выбранных чисел делится нацело на другое.

33.22. Сколько различных слов (не обязательно осмысленных) можно получить, переставляя буквы в слове (а) ТОЧКА; (б) ЛИНИЯ; (в) ПОТОП; (г) МАТЕМАТИКА?

33.23. 1993 ганстера стоят на плоскости; расстояния между ними попарно различны. Ровно в полдень каждый выстрелил в ближайшего к нему. Доказать, что по крайней мере один из гангстеров останется в живых.

33.24. Боря и Наташа играют в следующую игру: сначала Наташа называет число 3, 5 или 7, потом они по очереди прибавляют к имеющемуся числу 3, 5 или 7 и говорят ответ. Наташа имеет право называть только простые числа. Цель Наташи — назвать число, большее 100, цель Бори — не позволить ей. Кто победит при правильной игре?

33.25. (а) Докажите, что из любых трёх целых чисел можно выбрать два, сумма которых чётна. (б) Докажите, что из любых семи целых чисел можно выбрать три, сумма которых делится на 3.

33.26. Плоскость раскрашена в два цвета. Всегда ли найдутся две точки одного цвета на расстоянии 1 метр друг от друга?

33.27. На доске написано несколько положительных чисел, каждое из которых равно половине суммы остальных. Сколько чисел написано на доске?

33.28. В вершинах 10-угольника расставлены числа; каждое есть среднее арифметическое двух своих соседей. Докажите, что все числа равны.

33.29. На листе клетчатой бумаги двое по очереди обводят линии сетки — один красным цветом, а другой чёрным. На каждом шаге можно обвести линию между двумя соседними узлами; уже обведённые лннии обводить заново нельзя. Цель первого — нарисовать красный замкнутый контур, цель второго — не допустить этого. Кто победит?

33.30. На доске написаны числа $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55$. За один шаг разрешается увеличить два из них на 1. Можно ли несколькими такими операциями сделать все числа равными?

33.31. На столе стоят 57 стаканов. За ход разрешается перевернуть любые (а) 5 (б) 6 стаканов. Можно ли за несколько ходов поставить стаканы вверх дном?

33.32. Прямоугольная таблица из 5 строк и 7 столбцов заполнена числами. (а) Может ли сумма чисел в каждой строке быть положительной, а в каждом столбце — отрицательной? (б) Может ли сумма чисел в каждой строке быть чётной, а в каждом столбце — нечётной?

33.33. (а) В ряд стоят 6 сосен и на каждой сидит чиж. Каждую минуту два чижа перелетают на соседнюю сосну — один направо, другой налево. Могут ли чижи собраться на одной сосне? (б) Тот же вопрос, если сосны стоят по кругу, и один из чижей летит по часовой стрелке, а другой — против?

33.34. На доске выписаны числа $1, 2, \ldots, 19, 20$. Разрешается стереть любые два числа a и b, заменив их на $a + b - 1$, пока на доске не останется одно число. Какое число может остаться?

33.35. Тот же вопрос, если a и b можно заменить на $a + b + ab$.