С. Г. Гиндикин, А. А. Кириллов, Д. Б. Фукс, Работы И. М. Гельфанда по функциональному анализу, алгебре и топологии, *УМН*, 1974, том 29, выпуск 1, 195–223

РАБОТЫ И. М. ГЕЛЬФАНДА ПО ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ, АЛГЕБРЕ И ТОПОЛОГИИ

С. Г. Гиндикин, А. А. Кириллов, Д. Б. Фукс

Настоящий обзор приурочен к 60-летию И. М. Гельфанда. Авторы ограничились теми областями математики, которыми юбиляр занимался в последнее десятилетие, причем в разных областях хронология работ, охватываемых обзором, различна.

Продолжающиеся уже тридцать лет исследования И. М. Гельфанда по теории представлений групп распадаются на несколько циклов, большинство из которых широко известны и освещались в обзоре [1 *] [1]), посвященном 50-летию И. М. Гельфанда. По этой причине здесь речь идет лишь о результатах десяти последних лет.

Первым работам И. М. Гельфанда по интегральной геометрии более десяти лет, но эта область до сих пор находится в стадии становления. В связи с этим в обзор включен очерк основных исследований И. М. Гельфанда по интегральной геометрии, не исключая и сравнительно давних.

Топология — новая область в научной деятельности И. М. Гельфанда; все рассматриваемые работы выполнены в 1968—1973 гг.

В подготовке обзора принимали участие И. Н. Бернштейн, М. И. Граев, Д. А. Каждан.

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Теория представлений

Работы И. М. Гельфанда сороковых — пятидесятых годов по теории бесконечномерных представлений групп (совместно с Д. А. Райковым, М. А. Наймарком, М. И. Граевым и Ф. А. Березиным), по существу, открыли новый этап в теории представлений и во многом определили его содержание. Эти работы хорошо известны; краткий обзор их содержится в статье [1*], посвященной 50-летию И. М. Гельфанда.

Мы расскажем здесь о некоторых новых результатах И. М. Гельфанда в теории представлений, полученных в последние десять лет.

---

[1]) Звездочкой помечены ссылки на список литературы, помещенный в конце статьи. Ссылки без звездочки даются на библиографию работ И. М. Гельфанда (после 1963 г.), публикуемую в настоящем выпуске журнала.

1.1. Представления матричных групп над локальными полями. Первым объектом исследования в теории бесконечномерных представлений явились классические группы Ли над полем комплексных чисел. Это, разумеется, не случайно. Во-первых, классические группы естественно возникают в самых разных областях математики, механики и физики. Во-вторых, классические группы и их представления — это одна из самых красивых математических теорий, доставляющая глубокое эстетическое наслаждение всем, кто с ней знаком. Наконец, выбор комплексного поля существенно облегчает исследование, так как структура групп и их представлений в этом случае значительно проще, чем в случае других полей.

Однако в последнее время под влиянием современной алгебраической геометрии и теории чисел во многих областях сначала алгебры, а затем и анализа наметилась тенденция перехода от комплексного поля к возможно более общим полям.

Для функционального анализа в первую очередь представляют интерес такие поля, для которых можно построить содержательный аналог классического гармонического анализа. Примером могут служить так называемые локальные поля. К ним относятся поля вещественных, комплексных и $\mathfrak{p}$-адических чисел, а также поля формальных степенных рядов над конечным полем. Название «локальное поле» происходит от одного из способов построения этих полей,— с помощью локализации, т. е. пополнения по некоторой «локальной» норме, одного из так называемых «глобальных» полей (например, поля алгебраических чисел или поля функций на алгебраической кривой над конечным полем). Более подробные сведения о локальных и глобальных полях можно найти в книге А. Вейля [2*].

Одно из основных свойств локального поля K состоит в том, что его аддитивная группа K^+ локально компактна и двойственна сама себе в смысле Понтрягина. Отметим, что это свойство характеризует локальные поля среди всех бесконечных топологических полей. Для локального поля можно определить аналоги классических элементарных и специальных функций (принимающих комплексные значения): экспоненты, гамма- и бета-функции, функций Бесселя и др. Имеется естественное понятие преобразования Фурье и Меллина, а также пространств основных и обобщенных функций.

Очень интересным и трудным является вопрос о структуре алгебраических групп над локальным полем и их представлений. Даже для классических групп над вещественным полем вопрос об описании представлений не решен; в частности, отсутствует классификация унитарных неприводимых представлений этих групп.

Простейшей из классических групп является группа $SL(2, K)$ унимодулярных матриц второго порядка. В случае $K = \mathbf{C}$ — это известная группа Лоренца, в случае $K = \mathbf{R}$ она изоморфна подгруппе группы Лоренца, сохраняющей один пространственноподобный вектор. Теория унитарных представлений этих групп была построена еще в 1947 г. в известных работах И. М. Гельфанда — М. А. Наймарка и В. Баргмана. Для произвольного локального поля K (характеристики, отличной от 2) полный перечень всех неприводимых унитарных представлений был получен впервые И. М. Гельфандом и М. И. Граевым.

Кроме представлений основной и дополнительной серии (которые строятся точно так же, как и в случае комплексного и вещественного полей), группа $SL(2, K)$ обладает тремя дискретными сериями представлений и одним особым представлением. Представления дискретных серий нумеруются характерами групп единиц квадратичных расширений поля K. Конструкция этих представлений, предложенная И. М. Гельфандом и М. И. Граевым, использует аналог понятия «функции, граничной к аналитической в верхней полуплоскости» для локального поля K. А именно, так естественно назвать преобразования Фурье функций на K, сосредоточенных на «полупрямой» $N(L) \subset K$, состоящей из норм элементов квадратичного расширения L поля K. В случае $K = \mathbf{R}$, $L = \mathbf{C}$ мы имеем $N(\mathbf{C}) = \{x \in \mathbf{R},\ x \geqslant 0\} = \mathbf{R}_+$. Как известно, преобразования Фурье функций с носителями в $\mathbf{R}_+$ аналитически продолжаются в верхнюю полуплоскость.

Наличие особого представления связано со спецификой неархимедова поля. Это представление не имеет аналогов в случае классических полей.

Подробное изложение описанного здесь результата можно найти во второй главе монографии [142].

Отметим, что в третьей главе этой книги изложен принадлежащий И. М. Гельфанду теоретико-групповой подход к теории автоморфных функций и смежным вопросам теории чисел. Этот подход позволил дать более простое и естественное доказательство замечательных результатов А. Сельберга (так называемая формула следа). Плодотворность этого подхода была затем подтверждена многочисленными работами у нас и за рубежом.

В последнее десятилетие теория представлений групп $GL(n, K)$, где K — локальное поле, стала предметом интенсивных исследований. Работы Р. Ленглендса, А. Вейля, Хариш-Чандры, Р. Годмана, Э. Жаке и П. Делиня вскрыли много новых закономерностей и интересных связей. В частности, отметим очень глубокую гипотезу Вейля — Ленглендса о связи неприводимых бесконечномерных представлений группы $GL(n, K)$ и n-мерных представлений группы Шафаревича — Вейля $W(K)$. Для $n = 1$ эта гипотеза, по существу, равносильна основной теореме теории полей классов. В случае $n = 2$ и нечетного p один из локальных вариантов гипотезы доказан в работе Жаке — Ленглендса [3*].

Недавно И. М. Гельфанд и Д. А. Каждан предложили уточнение гипотезы Вейля — Ленглендса, основанное на сравнении двух специальных функций. Одна из них, так называемая L-функция Артина, строится по n-мерному представлению группы Шафаревича — Вейля $W(K)$. Другая введена И. М. Гельфандом и Д. А. Кажданом и строится по паре неприводимых представлений групп $GL(n, K)$ и $GL(n-1, K)$. Подробное изложение этой гипотезы и некоторых подтверждающих ее результатов см. в [4*].

Здесь мы ограничимся лишь приведением точной формулировки гипотезы Гельфанда — Каждана (ср. [231]).

Пусть K — локальное поле, $W(K)$ — группа Шафаревича — Вейля, I — подгруппа инерции. Определение этих групп (ср. [2*], приложение I) ясно из диаграммы:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \to & I & \to & \mathrm{Gal}(\overline{K}/K) & \to & \mathrm{Gal}(\overline{k}/k) & \to & 1 \\ & & \| & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 1 & \to & I & \longrightarrow & W(K) & \longrightarrow & \mathbf{Z} & \to & 1, \\ & & & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & & & 1 & & 1 & & \end{array}$$

где $\overline{K}$ — алгебраическое замыкание K, k — поле вычетов кольца целых в K по максимальному идеалу, $\overline{k}$ — его алгебраическое замыкание, подгруппа $\mathbf{Z}$ порождена автоморфизмом Фробениуса F.

Если σ — конечномерное представление $W(K)$ в пространстве V, то через V^I обозначается подпространство V, состоящее из инвариантов группы I. L-функция Артина представления σ определяется формулой

$$L(s, \sigma) = \det(1 - q^s\sigma(F)\,|_{V^I})^{-1}.$$

Здесь s — комплексная переменная, q — число элементов поля k.

Пусть теперь $G_n = GL(n, K)$, P_n — подгруппа в G_n, состоящая из матриц с последней строкой вида $(0, \ldots, 0, 1)$, $Z_n \subset P_n$ — подгруппа верхних треугольных матриц с единицами по главной диагонали. Мы отождествим G_{n-1} с подгруппой $P_n \cap P'_n \subset G_n$ (здесь штрих означает транспонирование).

В каком-то смысле группа P_n заключает в себе «всю некоммутативность» группы G_n. Для классических случаев $K = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$ это выражается, например, в том, что неприводимые унитарные представления G_n остаются неприводимыми при ограничении на P_n, или в том, что тело Ли группы G_n (см. ниже п. 1.2) является центральным расширением тела Ли группы P_n.

Для несвязного поля K аналогичное свойство подгруппы P_n формулируется более сложным образом.

Напомним, что представление π группы G_n в линейном комплексном пространстве V называется каспидальным, если для любой орисферической подгруппы $N \subset G_n$ (т. е. группы клеточно-треугольных матриц с единичными клетками по главной диагонали) векторы вида $\pi(n)v - v$, $n \in N$, $v \in V$, порождают V.

Оказывается, что все неприводимые каспидальные представления G_n при ограничении на P_n переходят в одно и то же неприводимое представление ρ группы P_n. А именно, ρ — это представление правыми сдвигами в пространстве V_θ функций на P_n, обладающих свойствами:

1) $f(zp) = \theta(z)\,f(p)$ для $z \in Z_n$, $p \in P_n$;

2) $f(p)$ локально постоянна на P_n;

3) $f(p)$ имеет компактный носитель $\mathrm{mod}\, Z_n$.

Здесь $\theta(z)$ обозначает унитарный характер группы Z_n, задаваемый формулой $\theta(z) = \chi\left(\sum\limits_{k=1}^{n-1} z_{k,\,k+1}\right)$, где χ — нетривиальный аддитивный характер поля K.

Другими словами, ρ — представление P_n, индуцированное одномерным представлением подгруппы Z_n. Отметим, что в силу условия 1) каждая функция $f \in V_\theta$ вполне определяется своим ограничением на подгруппу $G_{n-1} \subset P_n$.

Обозначим через s_n элемент G_n с коэффициентами

$$(s_n)_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } i+j \neq n+1, \\ (-1)^{i+1}, & \text{если } i+j = n+1. \end{cases}$$

Легко проверить, что группа G_n порождается элементом s_n и подгруппой P_n. Таким образом, для того чтобы полностью определить представление π группы G_n в пространстве V_θ, достаточно задать оператор $\pi(s_n)$.

Удобно ввести оператор C_π в пространстве V_θ по формуле

$$(C_\pi f)(g) = [\pi(s_n s_{n-1} g) f](1) \quad \text{для } g \in G_{n-1}.$$

Легко проверяется, что оператор C_π, так же как и $\pi(s_n)$, однозначно определяет представление π, и, кроме того, перестановочен со сдвигами на элементы $g \in G_{n-1}$.

Пусть теперь τ — неприводимое представление G_{n-1}, входящее в разложение пространства V'_θ, дуального к V_θ. Известно, что кратность вхождения в этом случае $\leqslant 1$. Те представления, для которых она равна 1, называются невырожденными. В частности, таковы все каспидальные представления.

Оператор C'_π, будучи перестановочен со сдвигами на элементы G_{n-1}, кратен единичному оператору на каждой неприводимой компоненте пространства V'_θ. Мы получаем, таким образом, комплексное число, зависящее от пары представлений. Это и есть Г-функция Гельфанда — Каждана.

Напомним, что при определении этой функции мы фиксировали некоторый нетривиальный характер χ поля K. Поэтому построенную функцию обозначают $\Gamma_\chi(\pi, \tau)$.

Пусть теперь $\widehat{W(K)}_n$ — совокупность классов эквивалентности n-мерных представлений группы $W(K)$, $\Pi_n(K)$ — совокупность классов эквивалентности неприводимых допустимых [1]) невырожденных представлений группы $GL(n, K)$. Гипотеза Вейля — Ленглендса состоит в существовании взаимно однозначного отображения $\varkappa_n$: $\widehat{W(K)}_n \to \Pi_n(K)$.

Предположим, что такое отображение $\varkappa_n$ существует и рассмотрим функцию

$$\varepsilon_\chi(\pi, \tau) = \Gamma_\chi(\varkappa_n(\pi), \varkappa_{n-1}(\tau)) \frac{L(1/2, \tilde{\pi} \otimes \tau)}{L(1/2, \pi \otimes \tilde{\tau})},$$

где волной обозначается контрагредиентное представление. Гипотеза Гельфанда — Каждана состоит в том, что при подходящем выборе $\varkappa_n$ и χ (для всех натуральных n и всех локальных полей L, содержащих K) функция $\varepsilon_\chi(\pi, \tau)$ обладает простыми функториальными свойствами относительно представлений π, τ и поля L.

А именно, условимся в качестве аддитивного характера поля L выбирать характер $\chi_L(x) = \chi_K(\mathrm{tr}_K^L x)$, где χ — фиксированный характер поля K.

1) Представление π называется допустимым, если стабилизатор каждого вектора открыт и пространство векторов с данным стабилизатором конечномерно.

Кроме того, одно из утверждений гипотезы состоит в том, что $\varepsilon_\chi(\pi, \tau)$ зависит только от произведения $\pi \otimes \tilde{\tau} = \sigma$. Поэтому в дальнейшем мы вместо $\varepsilon_\chi(\pi, \tau)$ будем писать $\varepsilon_L(\sigma)$, имея в виду равенство

$$\varepsilon_{\chi_L}(\pi, \tau) = \varepsilon_L(\pi \otimes \tilde{\tau}).$$

Первое функториальное свойство функции $\varepsilon_L(\sigma)$ формулируется так. Если представление σ приводимо и имеет подпредставление σ' и фактор-представление σ'', то

$$\varepsilon_L(\sigma) = \varepsilon_L(\sigma')\, \varepsilon_L(\sigma'').$$

Это позволяет продолжить функцию $\varepsilon_L(\sigma)$ на группу Гротендика $\Gamma(L)$ категории представлений группы $W(L)$. (Другими словами, для любой формальной целочисленной комбинации вида $\sigma = \sum_k n_k\sigma_k$, $\sigma_k \in \widehat{W(L)}_{m_k}$ можно определить $\varepsilon_L(\sigma)$ равенством $\varepsilon_L(\sigma) = \prod_k \varepsilon_L(\sigma_k)^{n_k}$.

Теперь мы можем сформулировать второе функториальное свойство $\varepsilon_L(\sigma)$.

Если $\sigma \in \Gamma(L)$ и $\deg \sigma = 0$ (т. е. $\sigma = \sum_k n_k\sigma_k$, $\sigma_k \in \widehat{W(L)}_{m_k}$ и $\sum_k n_k \deg \sigma_k = \sum_k n_k m_k = 0$), то

$$\varepsilon_M\left(\mathrm{Ind}_{W(L)}^{W(M)} \sigma\right) = \varepsilon_L(\sigma)$$

для любого подполя M поля L (содержащего K).

Описанные выше функториальные свойства однозначно (хотя и неявно) определяют функцию $\varepsilon_L(\sigma)$, если она известна для всех одномерных представлений.

Для этого случая функция $\varepsilon_L(\sigma)$ определяется так. В силу основной теоремы локальной теории полей классов существует канонический изоморфизм между группой $GL(1, L) = L^\times$ и фактор-группой $W(L)$ по замыканию ее коммутанта. Двойственное отображение мы выберем в качестве нашего $\varkappa_1\colon \widehat{W(L)}_1 \to \Pi_1(L)$. Тем самым, каждому одномерному представлению σ группы $W(L)$ соответствует мультипликативный характер $\varkappa_1(\sigma)$ поля L.

Положим $\varepsilon_L(\sigma) = 1$, если характер σ неразветвлен, т. е. тривиален на подгруппе инерции $I \subset W(L)$ и

$$\varepsilon_L(\sigma) = \int_L [\varkappa_1(\sigma)](x)\, \chi_L(x)\, d^*x,$$

если σ разветвлен [1]).

Формулировка гипотезы теперь полностью закончена.

1.2. Некоммутативная алгебраическая геометрия. Основу современной алгебраической геометрии составляет коммутативная алгебра — далеко продвинутая теория коммутативных колец. Однако во многих вопросах

[1]) Этот интеграл расходится, но может быть регуляризован с помощью стандартной техники (см. [142], гл. 2). Его значение называют иногда Γ-функцией поля L и обозначают $\Gamma_L(\varkappa(\sigma_1))$.

анализа естественно возникают некоммутативные кольца, заслуживающие не менее тщательного изучения. По аналогии с коммутативным случаем можно поставить вопрос о «бирациональной классификации» этих колец, т. е. о классификации соответствующих тел частных. Нужно сказать, что в некоммутативном случае само определение тела частных не очевидно и не тривиально. Для широкого класса колец тело частных может быть построено следующим естественным способом. Предположим, что в кольце R нет делителей нуля, т. е. из $xy = 0$ следует $x = 0$ или $y = 0$. Рассмотрим всевозможные «левые дроби» вида xy^{-1} и «правые дроби» вида $y^{-1}x$, где $y \neq 0$. Будем считать, что левая дробь xy^{-1} эквивалентна правой дроби $a^{-1}b$, если выполняется равенство $ax = by$ (формально равносильное равенству $xy^{-1} = a^{-1}b$). Две левые (правые) дроби будем считать эквивалентными, если они эквивалентны одной и той же правой (левой) дроби.

Кольцо R называется правым кольцом Оре, если для любых ненулевых элементов x, y из R существует ненулевое общее правое кратное a, т. е. $a = xx_1 = yy_1$ для некоторых x_1, y_1 из R. Аналогично определяется левое и двустороннее кольцо Оре. Последнее мы будем называть просто кольцом Оре.

Легко проверить, что для правого кольца Оре всякая левая дробь эквивалентна некоторой правой дроби, причем для любых двух левых дробей найдутся эквивалентные им правые дроби с общим знаменателем. Это позволяет для любого кольца Оре R без делителей нуля определить в множестве классов эквивалентных дробей все четыре арифметические операции, полагая

$$xa^{-1} \pm ya^{-1} = (x \pm y)a^{-1},\ (xy^{-1})^{-1} = yx^{-1},$$
$$xa^{-1} \cdot ay^{-1} = xy^{-1}.$$

Получаемое таким образом тело D и называется телом частных кольца R.

Достаточно большой запас колец Оре обеспечивают следующие простые леммы (см. [144]).

Лемма 1. *Всякое нётерово слева (справа) кольцо без делителей нуля является левым (правым) кольцом Оре.*

Лемма 2. *Если кольцо R допускает такую фильтрацию $R = \bigcup R_k$, что присоединенное кольцо* $\mathrm{gr}\, R = \bigoplus_k R_k/R_{k-1}$ *нётерово слева (справа) и не имеет делителей нуля, то этими же свойствами обладает и само кольцо R.*

Важным примером некоммутативного кольца Оре является кольцо дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами от n переменных. Чуть более общий объект, так называемая алгебра Вейля $A_n(K)$, определяется как алгебра над полем K с образующими $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$ и соотношениями

$$(1.1.) \qquad p_iq_j - q_jp_i = \delta_{ij}, \quad p_ip_j = p_jp_i, \quad q_iq_j = q_jq_i$$

(канонические коммутационные соотношения). Тело частных алгебры $A_n(K)$ мы обозначим $D_n(K)$. В частном случае, когда K — поле рациональных функций от k переменных $z_1, \ldots, z_k$, мы будем называть $D_n(K)$ стандартным телом и обозначать его $D_{n,k}$. Можно показать, что стандартные тела попарно неизоморфны при различных значениях n и k (см. [144]).

К числу колец Оре относятся также обертывающие алгебры (в другой терминологии — ассоциативные оболочки) алгебр Ли [1]). Если $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $X_1, \ldots, X_N$ — ее базис и $[\ ,\ ]$ — операция коммутирования, то обертывающая алгебра $U(\mathfrak{g})$ — это алгебра с образующими $X_1, \ldots, X_N$ и соотношениями

$$(1.2) \qquad X_iX_j - X_jX_i = [X_i, X_j], \qquad 1 \leqslant i, j \leqslant N.$$

Тело частных алгебры $U(\mathfrak{g})$ мы обозначим $D(\mathfrak{g})$ и назовем телом Ли алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Первые исследования алгебраической структуры тел Ли были начаты по инициативе И. М. Гельфанда. В работе [143] была выдвинута гипотеза о том, что для любой алгебраической алгебры Ли $\mathfrak{g}$ над алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики тело Ли $D(\mathfrak{g})$ изоморфно одному из стандартных тел $D_{n,k}$. Эта гипотеза доказана в [144] для всех нильпотентных алгебр Ли и для полной матричной алгебры. В работе [175] для всех полупростых алгебр Ли доказан ослабленный вариант этой гипотезы. А именно, оказалось, что некоторое алгебраическое расширение $\widetilde{D(\mathfrak{g})}$ тела $D(\mathfrak{g})$ изоморфно стандартному телу. Интересно, что $\widetilde{D(\mathfrak{g})}$ является расширением Галуа, причем роль группы Галуа играет группа Вейля алгебры $\mathfrak{g}$.

Доказательство этого факта использует одну специальную реализацию алгебры $U(\mathfrak{g})$ в виде алгебры дифференциальных операторов. А именно, рассмотрим алгебраическое многообразие A, которое является фактор-пространством группы G (рассматриваемой как алгебраическая группа) по максимальной унипотентной подгруппе N. Это многообразие хорошо известно в теории представлений. В работах И. М. Гельфанда и М. И. Граева по интегральной геометрии и методу орисфер оно было названо основным аффинным пространством группы G.

Действие группы G на A позволяет реализовать элементы алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в виде векторных полей на A, а элементы $U(\mathfrak{g})$ — в виде дифференциальных операторов на A.

Помимо структуры правого G-пространства многообразие A (ср. п. 1.2, 1.3) снабжено также структурой левого H-пространства, где H — картановская подгруппа в G, нормализующая N. Пусть R — алгебра всех дифференциальных операторов на A, перестановочных с действием H. Тело частных алгебры R — это и есть то расширение $\widetilde{D(\mathfrak{g})}$, о котором говорилось выше. Дальнейшее изучение алгебры R обещает быть очень интересным (см. [192] [219], [5*]).

Совсем недавно появилось одновременно несколько сообщений о том, что гипотеза Гельфанда — Кириллова проверена для разрешимых алгебраических алгебр Ли.

Покажем теперь, как описанные здесь результаты связаны с теорией унитарных представлений групп Ли. Изоморфизм $D(\mathfrak{g}) \approx D_{n,k}$ означает, что с помощью подходящей замены переменных коммутационные соотноше-

[1]) Определение алгебр Ли см. в § 3 этой статьи.

ния (1.2) сводятся к каноническим соотношениям (1.1). Если бы переход к новым переменным совершался с помощью многочленов, а не рациональных функций, то все проблемы теории унитарных представлений были бы решены. В самом деле, по известной теореме Стоуна — фон Неймана коммутационные соотношения (1.1) имеют единственную с точностью до эквивалентности неприводимую реализацию в гильбертовом пространстве. А именно, в пространстве $L^2(\mathbf{R}^n)$ элементу p_j соответствует оператор дифференцирования $\partial/\partial x_j$, а элементу q_j — оператор умножения на x_j. Придавая остальным образующим $z_1, \ldots, z_k$ произвольные числовые значения, мы получили бы k-параметрическое семейство неприводимых представлений исходной алгебры Ли в пространстве функций от n переменных.

В виду наличия знаменателей в формулах перехода, этот «наивный» подход позволяет построить только так называемые представления общего положения. Для изучения общего случая необходимы более полные сведения о структуре алгебры $U(\mathfrak{g})$ и тела $D(\mathfrak{g})$. В частности, полезно знать структуру двусторонних идеалов в $U(\mathfrak{g})$ и проверить справедливость основной гипотезы для тел частных соответствующих фактор-алгебр.

1.3. Представления бесконечномерных групп. Бесконечномерные группы уже давно встречались в математике и ее приложениях. Так, конфигурационным пространством в механике жидкости является группа диффеоморфизмов (для несжимаемой жидкости — группа диффеоморфизмов, сохраняющих объем) некоторой области; в квантовой теории поля важную роль играет так называемая группа токов, которую можно реализовать как группу функций на некотором многообразии со значениями в группе Гейзенберга и поточечным умножением; в функциональном анализе бесконечномерные группы естественно возникают как группы обратимых (унитарных, изометрических, мультипликативных и т. д.) операторов в линейных топологических (в частности, гильбертовых или банаховых) пространствах.

Теория представлений бесконечномерных групп еще не создана. По-видимому, ситуация здесь сильно отличается от той, которую мы имеем в случае конечномерных групп.

Мы расскажем здесь об одном очень интересном примере представления группы токов, который был построен в недавних работах И. М. Гельфанда (совместно с М. И. Граевым и А. М. Вершиком).

Группа, о которой идет речь, состоит из измеримых ограниченных функций на пространстве X с мерой μ, принимающих значения в группе Ли $SL(2, \mathbf{R})$. Две функции, совпадающие почти всюду, отождествляются. Групповой закон задается поточечным умножением.

Другими словами, рассматриваемая группа G — это $SL(2, R(X))$, где $R(X)$ — кольцо классов эквивалентности вещественных ограниченных измеримых функций на X. Ясно, что этот пример допускает различные модификации и обобщения.

В частности, более простая группа G получается, если вместо $SL(2, \mathbf{R})$ взять просто $\mathbf{R}$, а вместо кольца $R(X)$ классов измеримых функций на пространстве с мерой рассматривать кольцо $D(X)$ гладких функций на многообразии. В этом случае классификация неприводимых унитарных представлений группы G сводится к описанию обобщенных функций на X. В самом деле, группа G коммутативна, все ее неприводимые унитарные представления одномерны и, как легко видеть, имеют вид

$$f \mapsto e^{i\langle F, f\rangle}$$

где F — некоторый линейный функционал на $D(X)$.

Таким образом, теорию представлений групп описанного типа можно рассматривать как некоммутативный аналог теории обобщенных функций. В работе И. М. Гельфанда и М. И. Граева [171] для случая группы функций со значениями в $SU(2)$ были построены неприводимые представления, которые являются аналогами обобщенных функций с конечным носителем, т. е. дельта-функций и их производных [1]). Однако не удалось (и, по-видимому, для случая $SU(2)$ это и нельзя сделать) определить аналог интеграла, т. е. такого неприводимого представления, которое бы существенно зависело от значения функции f во всех точках X.

Неожиданно оказалось, что для группы функций со значениями в $SL(2, \mathbf{R})$ аналог интеграла существует. Подробное изложение шести разных подходов к этой конструкции см. в обзоре [242]. Здесь мы дадим лишь краткую формулировку результата.

Теорема. *Существует однопараметрическое семейство точных неприводимых унитарных представлений группы $SL(2, R(X))$, переходящих в эквивалентное представление при всех автоморфизмах группы, порождаемых автоморфизмами пространства с мерой X.*

1.4. Теория представлений и задачи линейной алгебры. После того как была решена задача об описании неприводимых бесконечномерных представлений комплексных классических групп, естественно было перейти к описанию произвольных представлений. В унитарном случае эта задача сводится к классификации неприводимых представлений. А именно, в теории операторных алгебр доказывается, что всякое унитарное представление сепарабельной локально компактной группы однозначно записывается в виде прямого интеграла так называемых примарных представлений.

Для групп типа I в смысле фон Неймана (в частности, для всех полупростых групп Ли) всякое примарное представление кратно неприводимому.

В неунитарном случае положение сложнее. Прежде всего, в этом случае бывают приводимые, но неразложимые представления. Это значит, что операторы представления имеют общее инвариантное подпространство, которое, однако, не обладает инвариантным дополнением. Кроме того, разложение произвольного представления на неразложимые не всегда возможно и однозначно. Те же трудности возникают и при инфинитезимальном подходе к этой задаче, т. е. при рассмотрении произвольных бесконечномерных $\mathfrak{g}$-модулей, где $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли.

И. М. Гельфанд предложил (см. [191]) выделить некоторую специальную подкатегорию в категории $\mathfrak{g}$-модулей. А именно, пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли, $\mathfrak{h}$ — ее подалгебра. Через $U(\mathfrak{g})$ мы обозначим обертывающую

[1]) Этот результат допускает наглядную интерпретацию с помощью метода орбит; см. [6 *].

алгебру для алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Назовем $\mathfrak{g}$-модуль $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$-конечным, если он конечнопорожден как $U(\mathfrak{g})$-модуль и является полупростым модулем с конечнократным спектром как $U(\mathfrak{h})$-модуль. Наибольший интерес представляет изучение категории $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$-конечных модулей в следующих двух случаях.

1) $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли, $\mathfrak{h}$ — подалгебра, соответствующая максимальной компактной подгруппе в группе Ли, присоединенной к $\mathfrak{g}$.

2) $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли, $\mathfrak{h}$ — редуктивная подалгебра того же ранга (в частности, картановская подалгебра).

В первом случае $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$-конечные модули называют также модулями Хариш-Чандры, так как из результатов Хариш-Чандры вытекает, что именно такие $\mathfrak{g}$-модули возникают из неприводимых представлений соответствующей группы Ли.

Полное описание модулей Хариш-Чандры известно лишь для простейшего случая, когда $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы Лоренца. Каждый неразложимый модуль Хариш-Чандры характеризуется двумя комплексными инвариантами λ_1, λ_2 (собственными значениями операторов Лапласа на группе). Возникает, таким образом, задача об описании категории $C(\lambda_1, \lambda_2)$ модулей Хариш-Чандры с заданными значениями инвариантов. Оказывается, что эта задача сводится к некоторым конечномерным задачам линейной алгебры. Для большинства значений λ_1, λ_2 соответствующая задача линейной алгебры очень проста и состоит в приведении к каноническому виду одной нильпотентной матрицы. В «особых» точках возникает более трудная и интересная задача о приведении к каноническому виду пары нильпотентных матриц A и B с условием $AB = BA = 0$. В отличие от первой задачи, ответ здесь содержит не только дискретные, но и непрерывные параметры. Можно показать, что полученные $\mathfrak{g}$-модули отвечают некоторым представлениям группы Лоренца. Таким образом, неразложимые представления группы Лоренца могут допускать нетривиальную деформацию.

Сведéние к задачам линейной алгебры возможно и в более общей ситуации. Для любой полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ категория неразложимых модулей Хариш-Чандры с фиксированными собственными значениями операторов Лапласа изоморфна категории неразложимых представлений некоторой конечномерной алгебры. Однако эта последняя задача часто оказывается «неразрешимой» в том смысле, что в качестве подзадачи в нее входит задача о приведении к каноническому виду пары произвольных матриц. (Эта последняя задача, как показано в [180], в свою очередь содержит в качестве подзадачи проблему классификации k произвольных матриц при любом k; естественно считать эту задачу эталоном «неразрешимости» и рассматривать как «неразрешимые» все задачи, к ней сводящиеся.)

Возможно, однако, что вся сложность задачи о классификации модулей Хариш-Чандры сводится к указанной выше. Было бы очень интересно точно сформулировать и доказать это утверждение.

Другая интересная категория получается, если в качестве $\mathfrak{h}$ взять картановскую подалгебру в алгебре $\mathfrak{g}$. Пусть $\mathfrak{b}$ — борелевская подалгебра, содержащая $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{n}$ — ее унипотентный радикал. В категории $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$-конечных модулей выделяется подкатегория $\mathcal{O}$, состоящая из тех модулей M, в которых все элементы $U(\mathfrak{n})$ — конечны (т. е. $\dim U(\mathfrak{n})\xi < \infty$ для всех $\xi \in M$).

В этой категории наиболее естественно строится теория старшего веса Картана в бесконечномерном случае. Хотя изучение этой категории началось недавно и далеко не закончено, полученные результаты оказались очень интересными и уже нашли приложения. Подробное изложение этих результатов см. в [203], [221].

Здесь мы приведем лишь один из них.

Пусть χ — линейный функционал на $\mathfrak{h}$ и M_χ — модуль из категории $\mathcal{O}$, который получается факторизацией $U(\mathfrak{g})$ по левому идеалу, порожденному $\mathfrak{n}$ и элементами вида $X - \langle \chi - \rho, X \rangle$, где $X \in \mathfrak{h}$, а ρ — полусумма положительных корней алгебры $\mathfrak{g}$ относительно $\mathfrak{b}$. Представим группу Вейля W алгебры $\mathfrak{g}$ в виде объединения подмножеств W_i, так что $w \in W_i$ переводит ровно i положительных корней в отрицательные.

Пусть V — конечномерный $\mathfrak{g}$-модуль со старшим весом λ. Тогда имеет место точная последовательность $\mathfrak{g}$-модулей:

$$0 \leftarrow V \leftarrow C_0 \leftarrow C_1 \leftarrow \ldots \leftarrow C_s \leftarrow 0,$$

где $C_i = \bigotimes\limits_{w \in W_i} M_{w\lambda}$.

Эта теорема имеет своими следствиями известную теорему Бореля — Вейля — Ботта, формулы Г. Вейля для характеров и Б. Костанта для кратности веса, а также теорему Хариш-Чандры о структуре идеала, соответствующего модулю V.

Отметим в заключение этого пункта, что полное описание категории $\mathcal{O}$ представляет очень большой интерес для теории представлений, но пока не получено. Неизвестно даже строение подмодулей данного модуля M_χ (примеры показывают, что среди этих подмодулей могут быть такие, которые не совпадают ни с одним из M_χ).

1.5. Теория представлений и алгебраическая топология. Связь между этими областями математики почти того же возраста, что и сами эти области. Еще в работах Э. Картана и Г. Вейля теория представлений была использована для нахождения чисел Бетти классических групп. Известная теорема Бореля — Вейля — Ботта является примером обратного влияния. Она дает наглядную реализацию неприводимых представлений компактной полупростой группы Ли G в терминах алгебраической топологии: пространство представления является пространством когомологий с коэффициентами в некотором линейном расслоении над однородным пространством $X = G/H$, где H — картановская подгруппа в G.

Пространство $X = G/H$ и его обобщения играют важную роль во многих вопросах теории представлений полупростых групп. Существенный новый шаг в изучении этих пространств был сделан в недавней работе [239]. Читатели «Успехов» могут познакомиться с этой работой по обзору [241]; поэтому здесь мы ограничимся лишь кратким описанием результата.

Группы когомологий пространства $X = G/H$ могут быть вычислены двумя различными способами.

а) Геометрический способ состоит в указании явного разбиения X на клетки четной размерности, нумеруемые элементами группы Вейля W группы G. (Отсюда, в частности, сразу вытекает, что эйлерова характеристика X равна порядку группы W).

б) Аналитический способ с помощью теоремы де Рама сводит задачу к описанию G-инвариантных дифференциальных форм на G/H, а это в свою очередь сводится к описанию W-инвариантных многочленов на картановской подалгебре.

Несмотря на естественность обоих способов, они приводят к разным базисам в группах когомологий и явные формулы перехода от одного базиса к другому не были известны до появления работы [239].

Отметим еще, что в качестве следствия этих явных формул авторы получают описание действия группы W (которая, очевидно, является группой автоморфизмов G-пространства X) на когомологиях пространства X.

§ 2. Интегральная геометрия

Первые работы И. М. Гельфанда и его сотрудников по интегральной геометрии возникли в связи с задачами теории представлений групп. Мы начнем, однако, с более элементарного вопроса об интегральном преобразовании Радона, где хорошо видны многие существенные особенности задач интегральной геометрии. Этот круг вопросов восходит к задаче Радона, поставленной в 1917 г. и решенной Джоном [7*], [8*]. Систематическое изучение преобразования Радона было предпринято в связи с написанием книги [9*].

2.1. Преобразование Радона. *Преобразованием Радона* функции $f(x)$ на $\mathbf{R}^n$ называется функция на множестве гиперплоскостей в $\mathbf{R}^n$, определяемая равенством

$$\hat{f}(\xi, p) = \int\limits_{(\xi, x)=p} f(x)\, d\omega, \qquad dx = dp\, d\omega.$$

Это преобразование тесно связано с преобразованием Фурье $\tilde{f}(\xi)$: оно связано с многомерным преобразованием Фурье при помощи одномерного преобразования Фурье:

$$\tilde{f}(\alpha\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi, p)\, e^{i\alpha p}\, dp, \qquad \alpha \in \mathbf{R}^1.$$

Соотношение между $\hat{f}$ и $\tilde{f}$ позволяет сравнительно легко получать свойства преобразования Радона, исходя из соответствующих свойств преобразования Фурье; однако в ряде задач использование преобразования Радона более предпочтительно, чем преобразования Фурье. Метод плоских волн в теории дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, основанный на преобразовании Радона, позволил решить ряд важных задач, например, исследовать фундаментальное решение строго гиперболического оператора (формула Герглотца — Петровского).

При применении преобразования Радона основную роль играет формула обращения. Вид этой формулы существенно зависит от четности n (размерности пространства). Если n нечетно, то для получения $f(x)$ достаточно осреднить $\partial^{n-1}\hat{f}(\xi, p)/\partial p^{n-1}$ по множеству гиперплоскостей, проходящих через x (относительно некоторой канонической меры); в случае же четного n в формуле обращения вместо оператора дифференцирования по p стоит оператор Римана — Лиувилля (дробного дифференцирования). По этой причине формула обращения в нечетномерном случае локальна, т. е. для восстановления $f(x)$ достаточно знать значения $\hat{f}$ на гиперплоскостях, проходящих через маленькую окрестность точки x. В четномерном же случае в той же ситуации необходимо знать интегралы по всем гиперплоскостям. Это различие тесно связано с тем, что принцип Гюйгенса имеет место в нечетномерном пространстве и не имеет места в четномерном.

Задачи, связанные с преобразованием Радона, отличает своеобразие и вместе с тем близость классическому анализу. И. М. Гельфанд всегда охотно ставил такого типа задачи студентам. Вот один пример (см. «Математическое просвещение», вып. 2, 1957 стр. 274). Пусть $n = 3$ и f — характеристическая функция некоторого тела T. Осредним по $\xi \in S^2$ (S^2 — сфера) величину $u(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial \hat{f}(\xi, p)}{\partial p} \right|^2 dp$. Получаем геометрическую характеристику $\overline{w}(T)$, имеющую размерность объема; каков ее геометрический смысл? [1]).

Теорию преобразования Радона естественно излагать на языке обобщенных функций. Об этом уже фактически речь идет в первом выпуске «Обобщенных функций» (хотя там еще отсутствует термин «преобразование Радона»). Систематическое изложение преобразования Радона на языке обобщенных функций содержится в 5-м выпуске этой серии [9*]. Прежде всего встает вопрос о том, как определить преобразование Радона $\hat{f}$ обобщенной функции, скажем, $f \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$[2]). Как и в случае преобразования Фурье здесь основную роль играет аналог теоремы Планшереля для преобразования Радона. В результате задача построения $\hat{f}$ сводится к нахождению такого функционала F, что $(f, \varphi) = (F, \hat{\varphi}(\xi, p))$ для всех $\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$. Сразу ясно, что в некотором смысле обобщенная функция F выбирается неоднозначно. Так, если $(f, \varphi) = \int\limits_{\mathbf{R}^n} \varphi(x)dx$, то $(f, \varphi) = (F, \varphi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(\xi, p)dp$ для любого ξ.

Причина в том, что функции $\hat{\varphi}$ для $\varphi \in \mathcal{S}$ очевидно удовлетворяют условиям однородности, гладкости, быстрого убывания по p. Но, кроме этих условий, имеется условие, состоящее в том, что моменты $\hat{\varphi}$ по p являются полиномами от ξ. И. М. Гельфанд иногда называет это условие «условием Кавальери», так как в простейшем случае оно состоит в независимости

[1]) «Секрет» этой задачи раскрывается при помощи формулы Планшереля для преобразования Радона [9 *], которая сразу же показывает, что $\overline{w}(T)$ пропорциональна объему.

[2]) $\mathcal{S}'$ — пространство Шварца обобщенных функций умеренного роста, сопряженное пространству $\mathcal{S}$ функций, быстро убывающих вместе со всеми производными.

$\int \hat{\varphi}(\xi, p)dp$ от ξ. Оно в точности эквивалентно гладкости преобразования Фурье $\tilde{f}$ в нуле. Естественно искать F в классе функционалов над основными функциями ψ, удовлетворяющими всем перечисленным условиям на φ, исключая условия Кавальери. Однако при этом F определится с точностью до функционалов, равных нулю на подпространстве основных функций, удовлетворяющих условиям Кавальери. Примерами таких «несущественных» обобщенных функций и являются функционалы $\int\limits_{-\infty}^{\infty} [\psi(\xi', p) - \psi(\xi'', p)]dp$. Все «несущественные» обобщенные функции удается описать; в частности, они оказываются полиномами по p. Вот интересное следствие: если $\mathscr{L}$ — множество гиперплоскостей, зная интегалы по которым от $f \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$, можно восстановить $\int\limits_{\mathbf{R}^n} f(x)dx$, то $\mathscr{L}$ для некоторого ξ содержит почти все гиперплоскости $(\xi, x) = p$ [1]).

Поучительны явные вычисления преобразований Радона характеристических функций некоторых неограниченных областей [9*]. В результате возникает способ определить, например, регуляризованные значения площадей всех конических сечений.

Наконец, в [9*] изучается аналог преобразования Радона в $\mathbf{C}^n$. Ситуация в $\mathbf{C}^n$ напоминает ту, которая имеется в $\mathbf{R}^{2k+1}$, и формула обращения для комплексного преобразования Радона локальна.

Уже рассмотрение этого наиболее элементарного раздела интегральной геометрии показывает, какую важную роль играет в ней рассмотрение отдельных красивых задач, доведение результата до явных формул. В дальнейшем мы увидим, что целый ряд моментов, выявившихся для преобразования Радона, характерен и для других задач интегральной геометрии.

2.2. Интегралы по линиям уровня однородного полинома и формула Планшереля. В книге И. М. Гельфанда и М. А. Наймарка [10*], которую ученики и сотрудники И. И. Гельфанда привыкли называть «синей» книгой, вероятно, наиболее трудной является часть, посвященная выводу аналога формулы Планшереля для комплексных классических групп Ли. Позднее И. М. Гельфанд и его сотрудники неоднократно возвращались к продумыванию этих вопросов и, как мы увидим, эти размышления в значительной степени стимулировали развитие интегральной геометрии. Эта деятельность тесно связана с работами по обобщенным функциям. Фактически обобщенные функции неявно присутствуют и в «синей» книге. В дальнейшем эти связи тщательно продумывались и углублялись.

Основное в выводе формулы Планшереля — это вычисление значения в единице функции на группе, если известны ее интегралы по классам сопряженных элементов. Это делается простым предельным переходом, когда группа, а значит, и классы сопряженных элементов компактны. В некомпакт-

[1]) Это следствие в некотором смысле можно рассматривать как утверждение об уникальности классического принципа Кавальери.

ном же случае предел не существует и требуется некоторая регуляризационная процедура.

В качестве модельной задачи рассмотрим задачу о восстановлении $f(0)$ при $f(x) \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ по $I_P(f;\ c)$ — интегралам f по линиям уровня $L_P(c) = \{x : P(x) = c\}$ однородного полинома P. Если линии уровня компактны (например, $P = x_1^2 + x_2^2$), то при надлежащей нормировке мер $f(0) = \lim\limits_{c\to 0} I_P(f;\ c)$. Но если L_P — гиперболы ($P = x_1^2 - x_2^2$), то $f(0)$ с точностью до множителя совпадает с $\lim\limits_{c\to 0} I'_P(f;\ c)$.

Эта задача оказалась связанной с работами по однородным обобщенным функциям. Напомним, что в докладе на Амстердамском математическом конгрессе И. М. Гельфанд поставил проблему изучения аналитического продолжения по λ обобщенной функции $(P^\lambda,\ \varphi)$. Примеры показали, что для некоторых P существует полюс, вычет в котором пропорционален $\delta(x)$. Тогда стандартные приемы теории обобщенных функций [11*] позволяют указать формулу, восстанавливающую $\varphi(0)$ по $I_P(\varphi;\ c)$. Оказывается, что таким образом может быть получен приведенный выше результат о гиперболах, и, более общо́, результаты известной работы М. Рисса об интегралах Римана — Лиувилля для волнового уравнения позволили решить задачу для случая, когда $P(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = x_1^2 + \ldots + x_n^2 - x_{n+1}^2$. И. М. Гельфанд и М. И. Граев [9*], [12*] обобщили результаты М. Рисса на произвольные квадратичные формы. Этот результат позволил решить задачу о восстановлении функции через интегралы по классам сопряженных элементов для классических комплексных групп. Заметим, что хотя в настоящее время полностью решена проблема И. М. Гельфанда о P^λ [13*], более точную информацию о вычетах P^λ, необходимую для решения сформулированной задачи интегральной геометрии (существование полюса, вычет в котором пропорционален $\delta(x)$) удалось получить в немногих случаях.

И. М. Гельфанд и М. И. Граев [14*] рассмотрели также случай вещественных групп. Характерный пример $SL(n;\ \mathbf{R})$ — группа вещественных матриц порядка n с определителем 1. Здесь ситуация осложняется тем, что классы сопряженных элементов бывают существенно разных типов. Мы поясним это на простейшем примере группы $SL(2;\ \mathbf{R})$, переформулировав задачу на негрупповом языке. Пусть на гиперболоиде $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 1$ задана быстро убывающая бесконечно дифференцируемая функция f. Рассмотрим ее интегралы по сечениям трехмерными плоскостями. Оказывается, f можно восстановить, если известны интегралы по сечениям, являющимся двухполостными гиперболоидами, и нельзя восстановить, если известны только интегралы по сечениям, являющимся однополостными гиперболоидами. Отметим, что в этой задаче существенно, что мы предполагаем у f лишь убывание быстрее всех степеней; если f финитна или хотя бы экспоненциально убывает, то сечений по однополостным гиперболоидам достаточно. Этот факт соответствует тому, что для функций первого типа преобразование Фурье — лишь бесконечно дифференцируемо, а для второго — аналитично.

2.3. Метод орисфер. Принципиальную роль в определении содержания того круга проблем, который И. М. Гельфанд относит к интегральной геометрии, имеет работа [15*]. Термин «интегральная геометрия» восходит к Бляшке. Однако проблематика интегральной геометрии в смысле И. М. Гельфанда существенно отличается от старого понимания этого термина. Определение круга вопросов, подведомственных интегральной геометрии, несколько раз уточнялось и расширялось. В момент написания статьи [15*] и вып. 5 «Обобщенных функций» [9*] общая ситуация представлялась следующим образом. Имеются два однородных пространства с одной и той же группой движения G: $X_1 = G/G_1$, $X_2 = G/G_2$. Тогда при некоторых условиях можно определить интегральное преобразование функций на X_1 в функции на X_2, интегрируя первые по траекториям G_2 на X_1. Интегральная геометрия должна изучать такого рода преобразования функций на однородных многообразиях.

Если говорить более конкретно, то отправной точкой работы [15*] является продумывание основной роли максимальной разрешимой подгруппы K и максимальной нильпотентной группы Z в конструкциях «синей» книги [10*]. Пусть, для определенности, $G = SL(n; \mathrm{C})$ —группа комплексных унимодулярных матриц порядка n с определителем 1, Z — подгруппа верхних треугольных матриц с единицами по главной диагонали, $X = G/Z$. Рассмотрим регулярное представление G в $L^2(X)$ (по инвариантной мере): $T_g f(x) = f(g(x))$ [1]. Можно считать, что f — такие функции на G, что $f(zg) = f(g)$, $z \in Z$, и тогда $T_{g_0} f(g) = f(gg_0)$. Пусть H — подгруппа диагональных матриц (максимальная картановская подгруппа). Тогда на $L^2(X)$ наряду с операторами T_g действуют операторы «левого сдвига» на элементы $h \in H$: $\Lambda_h f(g) = f(hg)$ (ср. п. 1.2, стр. 202). Непосредственно проверяется, что поскольку H содержится в нормализаторе $Z(h^{-1}Zh = Z,\ h \in H)$, то Λ_h сохраняют условие $f(zg) = f(g)$.

Используя гармонический анализ на коммутативных группах, $L^2(X)$ раскладывается в непрерывную сумму инвариантных относительно Λ_h гильбертовых пространств: функции из каждого пространства под действием Λ_h, $h \in H$, умножаются на некоторый характер H. Замечательно, что это разложение оказывается одновременно разложением представления T_g на неприводимые представления группы G, причем эквивалентны те и только те представления, отвечающие которым характеры H получаются друг из друга под действием элементов из группы Вейля (в данном случае группы перестановок диагональных элементов матрицы h).

Второй замечательный факт заключается в том, что получающийся набор унитарных представлений достаточен для разложения регулярного представления в $L^2(G) : T_{g_0} f(g) = f(gg_0)$. Дело обстоит следующим образом. Рассмотрим на G траектории подгруппы Z и ее сопряженных. Они называются *орисферами*. Орисферы имеют вид $\Omega(g_1, g_2) = \{g_1 Z g_2\}$; при этом в общем положении они определяются парой классов смежности $\{g_1 Z\}$, $\{Z g_2\}$, т. е. парой $x_1, x_2 \in X = G/Z$. Поставим в соответствие $f \in L^2(G)$ ее интегралы по орисферам $\hat{f}(x_1, x_2)$. При этом правым сдвигам на G отвечает естественное преобразование $\hat{f}(x_1, x_2) \mapsto \hat{f}(x_1, g(x_2))$, где G действует на второй аргумент x_2

[1]) Иногда его называют квазирегулярным.

как на точку однородного пространства $X = G/Z$. Тем самым разложение возникающего представления в $\hat{f}$ на неприводимые автоматически получается из разложения квазирегулярного представления в $L^2(X)$.

В свою очередь разложение регулярного представления сводится к выяснению свойств отображения $f(g) \mapsto \hat{f}(x_1, x_2)$. Прежде всего нужно выяснить, имеет ли это отображение ядро, а для получения разложения в явном виде надо получить формулы обращения $\hat{f} \mapsto f$. Часть результатов «синей» книги можно интерпретировать как доказательство отсутствия ядра при отображении $f \mapsto \hat{f}$ и получение явной формулы обращения.

Эта формула по структуре напоминает формулу обращения для преобразования Радона. Естественно определяется понятие «параллельных» орисфер — траекторий одной и той орисферической подгруппы gZg^{-1} (g — фиксированно); они параметризуются элементами группы H. На H определяется канонический оператор L, который в экспоненциальных координатах записывается как дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами. Этот оператор применяется к $\hat{f}$ (вдоль каждого множества параллельных орисфер), а затем $L\hat{f}$ осредняется по множеству орисфер, проходящих через точку g. Полученная функция только постоянным множителем отличается от $f(g)$.

Пусть $f(g)$ инвариантна относительно левых сдвигов на элементы подгруппы G_0, т. е. f можно интерпретировать как функции на однородном пространстве G/G_0. Если подгруппа G_0 компактна, то $L^2(G/G_0)$ вкладывается в $L^2(G)$ и предыдущая схема позволяет разложить регулярное представление в $L^2(G/G_0)$. Специального упоминания заслуживает случай $G_0 = U$ — максимальная компактная подгруппа [1]). Тогда $S = G/U$ — риманово симметрическое пространство неотрицательной кривизны. В этом случае $\hat{f}$ не зависит от x_1, а орисферы на S определяются геометрически, совпадая в случае пространства Лобачевского ($SL(2; \mathrm{C})/SU(2)$) с орисферами в принятом для этого пространства смысле. Возникающая при этом задача интегральной геометрии на пространстве Лобачевского оказывается более содержательной, чем другой возможный аналог задачи Радона, когда рассматриваются интегралы функции по плоскостям Лобачевского.

Что касается случая некомпактной подгруппы G_0, то в принципе всегда можно действовать по схеме «метода орисфер». Однако вопросы об исследовании ядра отображения $f \mapsto \hat{f}$ и разложения возникающего представления в функциях $\hat{f}$ требуют специальных рассмотрений. Последний вопрос может привести к трудностям, связанным с разбиением множества орисфер на G/G_0 на орбиты относительно действия группы G. В [15*] разобран важный случай, когда $G_0 = H$. Из этого результата следует разложение кронекеровского произведения двух представлений основной серии на неприводимые; для группы Лоренца это разложение было ранее получено М. А. Наймарком.

Очень плодотворным оказался метод орисфер при изучении случая, когда G_0 — дискретная подгруппа, для которой фактор-пространство G/G_0 имеет

[1]) В рассматриваемом примере можно считать, что U — подгруппа унитарных матриц.

конечный инвариантный объем [142]. В этом случае отображение $f \mapsto \hat{f}$ имеет ядро, причем в хороших случаях это ядро отделяет дискретный спектр в разложении G/G_0 на неприводимые, а орбиты в множестве орисфер отвечают «выходам» фундаментальной области на границу.

Далеко не полностью изучен случай, когда G — вещественная полупростая группа Ли. В этом случае, разумеется, квазирегулярное представление может быть разложено на неприводимые так же, как в случае комплексных групп. Однако возникающих при этом представлений недостаточно для разложения регулярного представления на G. Имеются еще так называемые представления дискретных серий (и смешанных). Это проявляется в том, что при отображении $f \mapsto \hat{f}$ пространства $L^2(G)$ имеется ядро. Оказывается, что ядро не содержит элементов, инвариантных при левых сдвигах на элементы максимальной компактной подгруппы U. Поэтому задачу о восстановлении $f \in L^2(S)$, где S — симметрическое пространство G/U, если известны интегралы по орисферам, можно ставить. Оказывается [16*], что в этом случае также существует оператор L на H (действующий вдоль множества параллельных орисфер) такой, что f (g) пропорциональна осреднению $L\hat{f}$ по множеству орисфер, проходящих через g. Однако, в отличие от случая комплексных групп, оператор L в общем случае не является локальным. Это обстоятельство осложняет нахождение его явного вида. Для ряда симметрических пространств оператор L вычислен в [16*].

2.4 Комплексы плоскостей в $\mathbf{C}^n$. Естественным развитием задачи Радона является задача о восстановлении функции, если известны ее интегралы по плоскостям размерности $k < n - 1$. Пусть $H = H_{n,k}$ — многообразие таких плоскостей в $\mathbf{C}^n$. При $k < n - 1$ размерность H больше n, а потому задача о восстановлении функции, используя интегралы по всем плоскостям из H, переопределена. Естественно ограничиться какими-либо подмножествами в H, и в частности, n-мерными подмногообразиями в H (комплексами).

Продумывание этой задачи стимулировало то обстоятельство, что задача интегральной геометрии для $SL(2;\ \mathbf{C})$ (соответственно $SL(2;\ \mathbf{R})$) (см. п. 2.3) эквивалентна задаче о восстановлении функции в $\mathbf{C}^3$ (соответственно в $\mathbf{R}^3$), если известны ее интегралы по всем комплексным (вещественным) прямым, проходящим через гиперболу $\{t,\ t^{-1},\ 0\}$, где $t \in \mathbf{C}$ (соответственно $t \in \mathbf{R}$). Это множество прямых трехмерно. В комплексном случае можно получить формулу обращения, а в вещественном случае в задаче о восстановлении нет единственности.

Пусть $f(x) \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, $\hat{f}(h) = \int\limits_h f$, $h \in H_{n,k}$. Пусть $G = G_{n,k}$ — соответствующее грассманово многообразие (k-мерных подпространств в $\mathbf{C}^n$) и π: $H_{n,k} \to G_{n,k}$ — каноническое расслоение. Для каждого $x \in \mathbf{C}^n$ рассмотрим множество H_x плоскостей $h \in H_{n,k}$, проходящих через x; H_x —это сечение расслоения $H \to G$. При помощи π будем отождествлять H_x с базой. Пусть $M \subset H$ инвариантно относительно сдвигов в $\mathbf{C}^n$. Тогда M полностью определяется своей проекцией $\pi M \subset G$. Нетрудно показать, что для возможности восстановления f по $\hat{f}\,|_M$ необходимо и достаточно выполнение следующего условия:

(*) *почти все гиперплоскости в* $\mathbf{C}^n$ *содержат плоскости из* M.

При выполнении (*) для восстановления f достаточно доинтегрировать $\hat{f}$ так, чтобы получились интегралы по почти всем гиперплоскостям, а затем воспользоваться формулой обращения для преобразования Радона.

В [153] показывается, что если πM — цикл ($\dim_{\mathbf{R}}\pi M = 2k$), то восстановление можно осуществить следующим образом. Явно выписывается оператор $\varkappa$, ставящий в соответствие $\varphi \in \mathcal{S}(H)$ для каждого $x \in \mathbf{C}^n$ дифференциальную форму $\varkappa_x\varphi$ на $H_x \cong G_{n,k}$ типа (k, k); $\varkappa$ является дифференциальным оператором с постоянными коэффициентами, действующим вдоль слоев расслоения $H \to G$. При $k < n-1$ оказывается, что $\varphi \in \mathcal{S}(H)$ лежит в образе $f \mapsto \hat{f}$ тогда и только тогда, когда формы $\varkappa_x\varphi$ замкнуты для всех x. При этом условии

$$\int\limits_{\pi M} \varkappa_x \hat{f} = c_M f(x),$$

причем $c_M \neq 0$ тогда и только тогда, когда выполняется условие (*).

Таким образом, в случае комплексов, инвариантных относительно сдвигов, получается универсальная формула обращения.

2.5. Допустимые комплексы. Локальность формулы обращения позволяет существенно ослабить требование инвариантности M относительно сдвигов. Пусть M — такое аналитическое многообразие в $H_{n,k}$, что для почти всех $x \in C^n$ множества $M_x = M \cap H_x$ являются циклами в $G_{n,k}$, на которых форма $\varkappa_x\varphi$ вычисляется по $\varphi\,|_M$. Тогда, если M удовлетворяет (*), то имеющуюся формулу позволяет восстановить f по $\hat{f}\,|_M$. Такие многообразия будем называть *допустимыми комплексами*.

Вернемся теперь к задаче интегральной геометрии на $G = SL(p;\ \mathbf{C})$ (п. 2.3). Вложим G в $\mathbf{C}^n$, $n = p^2 - 1$. Тогда орисферы $\Omega(x_1, x_2)$ можно интерпретировать как плоскости размерности $k = p(p-1)/2$ в этом пространстве. Оказывается, что комплекс этих плоскостей является допустимым и формула обращения из п. 2.3 доставляет формулу обращения для задачи интегральной геометрии на $SL(p;\ \mathbf{C})$ [16*].

В вопросе об описании допустимых комплексов существенные результаты относятся лишь к случаю $k = 1$ (комплексы прямых). Описаны все допустимые комплексы прямых общего положения [164]. Оказывается, что при $n = 3$ каждый допустимый комплекс либо состоит из прямых, пересекающих фиксированную кривую, либо из прямых, касающихся фиксированной поверхности.

В дальнейших работах по интегральной геометрии был получен ряд результатов, связанных с переходом к интегральным преобразованиям дифференциальных форм [176]. В этой работе обсуждается общая (уже неоднородная) постановка задач интегральной геометрии, которые возникают, если между точками пары многообразий имеется отношение инцидентности. Пример такой задачи, связанной с парой грассмановых многообразий, рассмотрен в [185]. Работа [184] посвящена интегральной геометрии в проективном пространстве. В докладе [191] намечается путь, на котором, используя результаты этой работы, можно получить теорему Пэли — Винера на $G = SL(p;\ \mathbf{C})$. Напомним, что речь идет об условиях на $\hat{f}(x_1, x_2)$, $x_1, x_2 \in X = G/Z$, обеспечивающих принадлежность f пространству $\mathscr{S}(G)$. Если вложить G в $\mathbf{C}P^n$, $n = p^2 - 1$, то последнее условие означает возможность продолжения f до бесконечно дифференцируемой функции на $\mathbf{C}P^n$, равной нулю в бесконечно удаленных точках. Аналог теоремы Пэли — Винера получится, если перенести эти условия на $\hat{f}(x_1, x_2)$ при помощи формулы обращения в проективном пространстве.

§ 3. Когомологии бесконечномерных алгебр Ли

Большой цикл работ И. М. Гельфанда, написанных в 1968—1972 гг., по большей части совместно с Д. Б. Фуксом, посвящен изучению когомологий бесконечномерных алгебр Ли.

Формальное определение когомологий алгебры Ли было дано Шевалле и Эйленбергом в 1948 г. (см. [17*]); фактически же это понятие было известно еще Э. Картану. В течение последних двух десятилетий когомологическая теория алгебр Ли интенсивно развивалась, и можно сказать, не входя в подробности, что когомологии вещественных и комплексных конечномерных алгебр Ли известны теперь так же хорошо, как когомологии соответствующих групп Ли; детали читатель может найти в трудах семинара «Софус Ли» [18*]. Тем не менее, до работ И. М. Гельфанда не было сделано ни единой попытки узнать что-либо о когомологиях бесконечномерных алгебр Ли, хотя примеры таких алгебр известны, можно сказать, с незапамятных времен.

Почему так получилось? Во-первых, не было оснований ожидать, что определяемые через посредство бесконечномерных объектов когомологии окажутся конечномерными, и, значит, содержательными с точки зрения теории гомологий. Во-вторых, те разделы топологии и анализа, алгебраические корни которых уходят в когомологии бесконечномерных алгебр Ли, были заморожены по тем же причинам (забегая вперед, скажем, что работы Гельфанда послужили толчком к развитию этих разделов). Так или иначе, о когомологиях бесконечномерных алгебр Ли до 1968 г. не было известно ничего, и уже первые, очень частные, результаты Гельфанда воспринимались как совершенно неожиданные.

3.1. Общие определения. (Первоисточник: 13-я глава «Гомологической алгебры» Картана — Эйленберга). *Алгеброй Ли* над полем $\mathbf{k}$ называется векторное пространство $\mathfrak{g}$ (над $\mathbf{k}$), наделенное умножением $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbf{k}} \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ (произведение элементов $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$ называется их *коммутатором* и обозначается через $[\xi, \eta]$) с двумя свойствами: (i) $[\xi, \xi] = 0$ для любого $\xi \in \mathfrak{g}$; (ii) $[\xi, [\eta, \zeta]] + [\eta, [\zeta, \xi]] + [\zeta, [\xi, \eta]] = 0$ для любых $\xi, \eta, \zeta \in \mathfrak{g}$. Векторное пространство M называется $\mathfrak{g}$-модулем, если задан гомоморфизм $\mathfrak{g} \otimes M \to M$ (образ элемента $\xi \otimes x$ при этом гомоморфизме обычно обозначается через ξx), такой, что $\xi(\eta x) - \eta(\xi x) = [\xi, \eta]x$ для любых $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$, $x \in M$.

Под *q-мерной коцепью* алгебры $\mathfrak{g}$ со значениями (с коэффициентами) в M понимается q-линейная кососимметрическая функция на $\mathfrak{g}$ со значениями в M; q-мерные коцепи составляют векторное пространство, обозначаемое через $C^q(\mathfrak{g};\ M)$. Формула

$$(3.1)\qquad dL(\xi_1, \ldots, \xi_{q+1}) = \\ = \sum_{1\leqslant s<t\leqslant q+1} (-1)^{s+t-1} L([\xi_s, \xi_t], \xi_1, \ldots, \hat{\xi}_s, \ldots, \hat{\xi}_t, \ldots, \xi_{q+1}) + \\ + \sum_{1\leqslant s\leqslant q+1} (-1)^s \xi_s L(\xi_1, \ldots, \hat{\xi}_s, \ldots, \xi_{q+1})$$

определяет гомоморфизм $d = d^q(\mathfrak{g})$: $C^q(\mathfrak{g};\ M) \to C^{q+1}(\mathfrak{g};\ M)$, называемый *дифференциалом*. Композиция $d^q(\mathfrak{g}) \circ d^{q-1}(\mathfrak{g})$ тривиальна, благодаря чему $\operatorname{Im} d^{q-1}(\mathfrak{g}) \subset \operatorname{Ker} d^q(\mathfrak{g})$. Фактор-пространство $\operatorname{Ker} d^q(\mathfrak{g})/\operatorname{Im} d^{q-1}(\mathfrak{g})$ называется *q-м пространством когомологий алгебры $\mathfrak{g}$ с коэффициентами в M* и обозначается через $H^q(\mathfrak{g};\ M)$.

Модуль M называется *тривиальным*, если $\xi x = 0$ для любых $\xi \in \mathfrak{g}$, $x \in M$; структурой тривиального $\mathfrak{g}$-модуля может быть наделено любое векторное пространство, в частности, само поле **k**. В случае тривиального модуля второе слагаемое правой части равенства (31) равняется нулю и может быть отброшено.

Если M есть коммутативная ассоциативная **k**-алгебра и операторы из $\mathfrak{g}$ являются дифференцированиями, в частности, если $M = \mathbf{k}$, то формула

$$(3.2)\qquad LL'(\xi_1, \ldots, \xi_{q+r}) = \\ = \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_q\leqslant q+r} (-1)^{i_1+\ldots+i_q-q(q+1)/2} L(\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_q}) \cdot \\ \cdot L'(\xi_1, \ldots, \hat{\xi}_{i_1}, \ldots, \hat{\xi}_{i_q}, \ldots, \xi_{q+r})$$

определяет умножение $C^q(\mathfrak{g};\ M) \otimes C^r(\mathfrak{g};\ M) \to C^{q+r}(\mathfrak{g};\ M)$, превращающее $C^*(\mathfrak{g};\ M) = \oplus_q C^q(\mathfrak{g};\ M)$ в ассоциативную кососкоммутативную градуированную **k**-алгебру. Это умножение связано с d формулой Лейбница и переносится благодаря этому в когомологии. Таким образом, в указанном случае $H^*(\mathfrak{g};\ M) = \oplus_q H^q(\mathfrak{g};\ M)$ также есть ассоциативная кососкоммутативная **k**-алгебра.

Если $\mathfrak{h}$ — подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$, то коцепи $F \in C^q(\mathfrak{g},\ M)$, удовлетворяющие условиям

$$L(\xi_1, \ldots, \xi_q) = 0 \text{ при } \xi_1 \in \mathfrak{h},$$
$$dL(\xi_1, \ldots, \xi_{q+1}) = 0 \text{ при } \xi_1 \in \mathfrak{h},$$

составляют подпространство пространства $C^q(\mathfrak{g};\ M)$, и это подпространство обозначается через $C^q(\mathfrak{g}, \mathfrak{h};\ M)$. Очевидно, $d[C^q(\mathfrak{g}, \mathfrak{h};\ M)] \subset C^{q+1}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h};\ M)$, что позволяет определить когомологии, отправляясь от пространств $C^q(\mathfrak{g}, \mathfrak{h};\ M)$. Получающиеся пространства $H^q(\mathfrak{g}, \mathfrak{h};\ M)$ называются пространствами когомологий алгебры $\mathfrak{g}$ *по модулю* $\mathfrak{h}$. На этот «относительный» случай переносится все сказанное об умножении в коцепях и когомологиях.

Как правило, рассматриваемые ниже алгебры Ли и модули над ними обладают дополнительной структурой: топологией. *В таком случае, не оговаривая этого специально, мы будем считать все коцепи непрерывными функциями своих аргументов, и в соответствующем смысле понимать когомологии.* Предостережем читателя, что эта терминологическая вольность не является общепринятой: то, что ниже называется когомологиями, обычно называют непрерывными когомологиями.

В заключение коротко прокомментируем данные определения. Если $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли конечномерной связной вещественной группы Ли G, то q-мерные коцепи алгебры $\mathfrak{g}$ с коэффициентами в тривиальном $\mathfrak{g}$-модуле $\mathbf{R}$ естественно отождествляются с левоинвариантными внешними дифференциальными формами степени q на G. Дифференциал d переходит при этом отождествлении в обычный внешний дифференциал, так что когомологии алгебры $\mathfrak{g}$ естественно отображаются в деРамовские когомологии группы G. Если группа G компактна, то последний гомоморфизм является изоморфизмом, и $H^*(\mathfrak{g}; \mathbf{R}) = H^*(G; \mathbf{R})$. Если группа G полупроста, то как легко понять, $H^*(\mathfrak{g}; \mathbf{R}) = H^*(G^*; \mathbf{R})$, где G^* — компактная форма группы G (см. [18*]). Наконец, если $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли компактной связной группы Ли G, а $\mathfrak{h}$ — алгебра Ли подгруппы H группы G, то

$$H^*(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}; \mathbf{R}) = H^*(G/H; \mathbf{R}).$$

Имеют объяснение на языке групп Ли и когомологии с коэффициентами в нетривиальных модулях.

3.2. Алгебры Ли гладких векторных полей. Случай окружности. Гладкость ниже понимается как принадлежность к классу C^∞.

Гладкие векторные поля на гладком многообразии M по отношению к скобке Пуассона составляют, как это хорошо известно, алгебру Ли; эта алгебра, наделенная C^∞-топологией, будет обозначаться через $\mathfrak{a}(M)$. Возникает задача вычисления когомологий этой алгебры как с тривиальными коэффициентами, так и с коэффициентами в естественных $\mathfrak{a}(M)$-модулях, какими являются пространство $C^\infty(M)$ гладких функций на M, пространство $\Omega^r(M)$ гладких внешних дифференциальных форм степени r на M, всевозможные пространства гладких тензорных полей на M и т. д. Один из главных результатов Гельфанда — Фукса составляет следующая теорема [178]:

Для любого гладкого многообразия M и любого целого q пространство $H^q(\mathfrak{a}(M); \mathbf{R})$ конечномерно.

Подобное утверждение имеет место и для когомологий с коэффициентами во многих нетривиальных модулях, в частности, во всех модулях, перечисленных выше (см. [19]*). Статья [178] и последующие публикации различных авторов содержат и некоторую информацию об устройстве групп $H^q(\mathfrak{a}(M); \mathbf{R})$; тем не менее эти группы до сих пор полностью не вычислены. Отложив до п. 4 рассказ об имеющемся здесь прогрессе, мы приведем результаты более ранней работы [169], содержащей полное вычисление пространств $H^q(\mathfrak{a}(M); \mathbf{R})$ в случае, когда M есть окружность S^1.

Заметим, что гладкие векторные поля на S^1 естественно отождествляются с гладкими функциями, а операция коммутирования задается формулой

$$[f, g] = fg' - f'g.$$

Вот полное описание когомологий $H^q(\mathfrak{a}(S^1); \mathbf{R})$: пространство $H^q(\mathfrak{a}(S^1); \mathbf{R})$ тривиально при $q = 1$ и одномерно при $q \geqslant 2$; более того, кольцо $H^*(\mathfrak{a}(S^1); \mathbf{R})$ является тензорным произведением (над $\mathbf{R}$) кольца полиномов от одной двумерной образующей, a, на внешнюю алгебру от одной трехмерной образующей, b, и образующие a, b представляются коцепями

$\alpha \in C^2(\mathfrak{a}(S^1);\ \mathbf{R})$, $\beta \in C^3(\mathfrak{a}(S^1);\ \mathbf{R})$, определяемыми формулами

$$\alpha(f_1, f_2) = \int\limits_{S^1} \begin{vmatrix} f_1' & f_2' \\ f_1'' & f_2'' \end{vmatrix} d\theta,$$

$$\beta(f_1, f_2, f_3) = \int\limits_{S^1} \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ f_1' & f_2' & f_3' \\ f_1'' & f_2'' & f_3'' \end{vmatrix} d\theta.$$

3.3. Алгебры Ли формальных векторных полей. Дальнейшие результаты о когомологиях алгебр $\mathfrak{a}(M)$ опираются на другую группу теорем: теоремы о когомологиях алгебр Ли формальных векторных полей ([188], [190], [195], [196]). Сдедует заметить, что эти теоремы, возникшие в свое время в качестве лемм к теоремам о когомологиях алгебр Ли гладких векторных полей, приобрели теперь важное самостоятельное значение благодаря их связи с недавно построенной теорией характеристических классов слоений; об этом пойдет речь в п. 3.5.

Через W_n мы обозначаем естественно топологизированную алгебру Ли формальных векторных полей в $\mathbf{R}^n$; напомним, что формальное векторное поле есть выражение вида $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_i}$, где a_i — формальные степенные ряды, и что коммутатор формальных векторных полей

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} a_i(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad \eta = \sum_{i=1}^{n} b_i(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_i}$$

определяется как формальное векторное поле

$$[\xi, \eta] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(a_j\frac{\partial b_i}{\partial x_j} - b_j\frac{\partial a_i}{\partial x_j}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Формальные векторные поля вида

$$\sum_{i,j} a_{ij}x_i\frac{\partial}{\partial x_j} \tag{3.3}$$

с $a_{ij} \in \mathbf{R}$ составляют, как легко понять, подалгебру алгебры W_n, изоморфную алгебре Ли $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ матриц порядка n. Эта подалгебра также будет обозначаться через $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$, а ее часть, составленная из полей вида (3.3) с $a_{ij} = -a_{ji}$, — через $\mathfrak{o}(n)$. Наиболее употребительные W_n-модули: $\mathbf{R}$; пространство S_n формальных степенных рядов в $\mathbf{R}^n$; пространство Ω_n^r формальных внешних дифференциальных форм степени r в $\mathbf{R}^n$; другие пространства формальных тензорных полей в $\mathbf{R}^n$.

Обозначим через V_n $2n$-й остов стандартного клеточного разбиения классифицирующего пространства унитарной группы $U(n)$, через X_n — прообраз V_n в тотальном пространстве универсального $U(n)$-расслоения (так что X_n есть $U(n)$-пространство и $X_n/U(n) = V_n$) и через Y_n — фактор-пространство $X_n/SO(n)$. Очевидно, в частности, что $X_1 = Y_1 = S^3$. Мы приведем формулировку основного результата статьи [188] (в несколько модифицированной форме; см. [32*], [20*]).

Имеются такие, кольцевые изоморфизмы $H^*(W_n;\ \mathbf{R}) = H^*(X_n;\ \mathbf{R})$, $H^*(W_n,\ \mathfrak{o}(n);\ \mathbf{R}) = H^*(Y_n;\ \mathbf{R})$, $H^*(W_n,\ \mathfrak{gl}\ (n,\ \mathbf{R});\ \mathbf{R}) = H^*(V_n;\ \mathbf{R})$, *что диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} H^*(W_n;\ \mathbf{R}) & = & H^*(X_n;\ \mathbf{R}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H^*(W_n,\ \mathfrak{o}(n);\ \mathbf{R}) & = & H^*(Y_n;\ \mathbf{R}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H^*(W_n,\ \mathfrak{gl}(n,\ \mathbf{R});\ \mathbf{R}) & = & H^*(V_n;\ \mathbf{R}), \end{array}$$

в который левый ряд стрелок индуцирован вложением комплексов, а правый — естественными проекциями, коммутативна.

Из этой теоремы, в частности, следует, что умножение в кольце $H^*(W_n;\ \mathbf{R})$ тривиально (т. е. произведение любых двух элементов положительной размерности равняется нулю).

Когомологии алгебры W_n с коэффициентами в Ω_n^r описываются следующими формулировками:

$$H^q(W_n;\ \Omega_n^r) = \begin{cases} 0, & \text{если } q < r, \\ H^r(W_n;\ \Omega_n^r) \otimes H^{q-r}(U(n);\ \mathbf{R}), & \text{если } q \geqslant r; \end{cases}$$

размерность пространства $H^r(W_n;\ \Omega_n^r)$ равна 1 при $r = 0$ и равна числу различных представлений числа r в виде суммы натуральных слагаемых при $r > 0$.

Несколько усовершенствованное доказательство этих теорем изложено в недавнем докладе Годбийона на семинаре Бурбаки (см. [20*]).

Конечномерность пространств $H^*(W_n;\ \Omega_n^r)$, вытекающая из теоремы 3, является следствием общей теоремы о конечномерности когомологий широкого класса бесконечномерных алгебр Ли с коэффициентами в широком классе модулей (см. [196]). Когомологии нескольких алгебр этого класса вычислил Б. И. Розенфельд [21*]. В то же время о когомологиях алгебр Ли формальных векторных полей, не удовлетворяющих условиям общих теорем заметки [196], по-прежнему мало что известно. Эти когомологии продолжают изучаться И. М. Гельфандом и его учениками. Из достигнутых в этом направлении успехов заслуживают упоминания результаты о гамильтоновых векторных полях [230] и недавняя работа Л. В. Гончаровой [22]*, вычислившей когомологии алгебры W_1 с коэффициентами в широком классе W_1-модулей, в частности, с коэффициентами в произвольном пространстве формальных тензорных полей на прямой.

3.4. Алгебра Ли гладких векторных полей. Диагональный комплекс. Как уже говорилось в п. 3.2, когомологии алгебры Ли $\mathfrak{a}(M)$ гладких векторных полей на гладком многообразии M звестны полностью только в случае $M = S^1$. Однако имеется значительная (теперь можно даже сказать, исчерпывающая) информация о гомологиях одного важного подкомплекса коцепного комплекса алгебры $\mathfrak{a}(M)$, выделенного в [178] и называемого *диагональным*.

Коцепь $L \in H^q(\mathfrak{a}(M);\ \mathbf{R})$ называется диагональной, если для любых векторных полей $\xi_1, \ldots, \xi_q$ с $\bigcap_{i=1}^{q} \operatorname{supp} \xi_i = \Lambda$, где supp — носитель, Λ —

пустое множество, $L(\xi_1, \ldots, \xi_q) = 0$. Пространство q-мерных диагональных коцепей обозначается через C^q_Δ $(\mathfrak{a}(M);\ \mathbf{R})$, и, как легко проверить, $d[C^{q-1}_\Delta(\mathfrak{a}(M);\ \mathbf{R})] \subset C^q_\Delta(\mathfrak{a}(M);\ \mathbf{R})$. Пространство

$$\{(\operatorname{Ker} d) \cap [C^q_\Delta(\mathfrak{a}(M);\ \mathbf{R})]\}/d\,[C^{q-1}_\Delta(\mathfrak{a}(M);\ \mathbf{R})]$$

называется q-м пространством диагональных когомологий алгебры $\mathfrak{a}(M)$ и обозначается через $H^q_\Delta(\mathfrak{a}(M);\ \mathbf{R})$.

В статье [178] была построена спектральная последовательность с

$$E_2^{pq} = \begin{cases} 0, & \text{если } q = 0, \\ H^{p+n}(M;\ \mathbf{R}) \otimes H^q(W_n;\ \mathbf{R}), & \text{если } q \neq 0, \end{cases}$$

где $n = \dim M$, сходящаяся к $H^*_\Delta(\mathfrak{a}(M),\ \mathbf{R})$. Вопрос о дифференциалах этой спектральной последовательности долгое время оставался открытым; различные специальные случаи были исследованы в работах И. М. Гельфанда — Д. А. Каждана — Д. Б. Фукса [189], [215], [220] и М. В. Лосика [23*], пока, наконец М. В. Лосику [24*] и, независимо от него, Гийемину [25*], не удалось решить задачу полностью.

Вот это решение (для простоты мы ограничиваемся ориентируемым случаем). Пусть M — ориентированное многообразие, и пусть $(X(M), p, M)$ — расслоение со структурной группой $SO(n)$ и стандартным слоем X_n, ассоциированное с касательным расслоением многообразия M. Если $\{F^{pq}_r\}$ — вещественная когомологическая спектральная последовательность расслоения $(X(M),\ p,\ M)$, то существуют перестановочные с дифференциалами изоморфизмы

$$E_r^{pq} \to F_r^{p+n,\,q} \quad (r \geqslant 2,\ q \neq 0).$$

В частности, пространство $H^q_\Delta(\mathfrak{a}(M);\ \mathbf{R})$ при $q > n$ изоморфно $H^{q-n}(X(M);\ \mathbf{R})$ (при $q \leqslant n$ пространство $H^q_\Delta(\mathfrak{a}(M);\ R)$ тривиально).

Что касается «внедиагональных» когомологий алгебры $\mathfrak{a}(M)$, то их вычисление редуцировано в [178] к вычислению последовательности спектральных последовательностей, аналогичных спектральной последовательности из теоремы 4.1, но более сложных. С помощью этих спектральных последовательностей в [178] и доказана теорема о конечномерности (см. п. 3.2).

В задаче о вычислении когомологий алгебры $\mathfrak{a}(M)$ с нетривиальными коэффициентами положение очень похоже на положение в задаче вычисления $H^*(\mathfrak{a}(M);\ \mathbf{R})$. Здесь тоже есть свой диагональный комплекс (см. [26*], [190]), для вычисления его когомологий имеется спектральная последовательность, построенная И. М. Гельфандом и Д. Б. Фуксом [190] и вычисленная М. В. Лосиком [27*]. Впрочем, второй член спектральной последовательности из [190] выражается через когомологии алгебры W_n с нетривиальными коэффициентами, известные далеко не всегда (см. 3.2).

3.5. Применение: характеристические классы слоений. В заключение этого параграфа мы расскажем о резонансе, который изложенные результаты И. М. Гельфанда и его соавторов имели в классической области, лежащей на стыке топологии, алгебры и дифференциальной геометрии — теории слоений.

В июньском номере Comptes Rendus за 1971 г. появилась заметка двух молодых французских математиков, К. Годбийона и Ж. Вея [28*], в которой всякому ориентированному слоению коразмерности 1 на гладком многообразии M был отнесен некоторый элемент пространства $H^3(M; \mathbf{R})$, обладающий рядом любопытных свойств. Конструкция Годбийона и Вея совершенно элементарна и никакой серьезной алгебры не использует, но, тем не менее, уже в их заметке сказано, что построенный класс происходит от нетривиального элемента из $H^3(W_1; \mathbf{R})$ (см. п. 3.3). Это наблюдение указало направление, в котором следовало искать многомерные аналоги классов Годбийона — Вея, и они были найдены очень быстро. Обобщенные классы Годбийона — Вея были независимо открыты учениками И. М. Гельфанда И. Н. Бернштейном и Б. И. Розенфельдом [29*], Б. Мальгранжем (он так и не опубликовал своей работы), А. Хефлигером и Р. Боттом [30*], [31*]. Отсылая читателя, интересующегося подробностями, к обзорам [32*], [33*], мы коротко опишем результаты предложенных конструкций.

Говорят, что на гладком n-мерном многообразии M задано слоение коразмерности q, где $0 \leqslant q \leqslant n$, если M разбито на связные непересекающиеся подмножества F_α со следующим свойством: для каждой точки $x \in M$ существуют ее окрестность U и субмерсия $\varphi: U \to \mathbf{R}^q$, такие, что связные компоненты пересечений $F_\alpha \cap U$ отображаются посредством φ в отдельные точки. Гладкое отображение f гладкого многообразия N в гладкое многообразие M со слоением $\mathcal{F}$ называется трансверсальным к $\mathcal{F}$, если композиция отображения f с каждой из субмерсий φ представляет собой субмерсию. При выполнении этого условия связные компоненты множеств $f^{-1}(F_\alpha)$ составляют слоение на N той же коразмерности, что и $\mathcal{F}$; это слоение называется индуцированным $\mathcal{F}$ посредством f и обозначается через $f^*\mathcal{F}$. Слоения $\mathcal{F}_0$, $\mathcal{F}_1$ на M называются гомотопными, если существует слоение $\mathcal{F}$ на $M \times \mathbf{R}$, такое, что $i_0^*\mathcal{F} = \mathcal{F}_0$, $i_1^*\mathcal{F} = \mathcal{F}_1$, где i_0, i_1 — вложения $M \to M \times \mathbf{R}$, определяемые формулами $i_0(x) = (x, 0)$, $i_1(x) = (x, 1)$.

Ядра дифференциалов субмерсий φ из определения слоения составляют некоторое подрасслоение $\tau(\mathcal{F})$ касательного расслоения $\tau(M)$ многообразия M; это подрасслоение называется касательным к $\mathcal{F}$, а фактор-расслоение $\nu(\mathcal{F}) = \tau(M)/\tau(\mathcal{F})$ — нормальным к $\mathcal{F}$. Слоение $\mathcal{F}$ называется ориентируемым (ориентированным), если ориентируемо (ориентировано) расслоение $\nu(\mathcal{F})$. Ясно, что если $f: N \to M$ — гладкое отображение, трансверсальное к $\mathcal{F}$, то

$$\nu\,(f^*(\mathcal{F})) = f^*(\nu(\mathcal{F})).$$

Говорят, что задан *r-мерный нижний характеристический класс α ориентированных слоений коразмерности q*, если всякому ориентированному слоению $\mathcal{F}$ коразмерности q на любом гладком многообразии M (любой размерности) отнесен элемент $\alpha(\mathcal{F})$ пространства $H^r(M; \mathbf{R})$, причем $\alpha(f^*\mathcal{F}) = f^*\alpha(\mathcal{F})$ для любого гладкого отображения $f: N \to M$, трансверсального к $\mathcal{F}$. Говорят, что задан *r-мерный верхний характеристический класс β ориентированных слоений коразмерности q*, если всякому ориентированному слоению $\mathcal{F}$ коразмерности q на любом гладком многообразии M отнесен элемент $\beta\,(\mathcal{F})$ пространства $H^r(\mathcal{N}(\mathcal{F}); \mathbf{R})$, где $\mathcal{N}(\mathcal{F})$ — тотальное пространство $SO(q)$ — расслоения, ассоциированного с $\nu(\mathcal{F})$, причем для любого гладкого отображения $f: N \to M$, трансверсального к $\mathcal{F}$, имеет место равенство $\tilde{f}^*\beta(\mathcal{F}) = \beta(f^*\mathcal{F})$, где $\tilde{f}$ — отображение $\mathcal{N}(f^*\mathcal{F}) \to \mathcal{N}(\mathcal{F})$, индуцированное f.

Легко показать, что как нижние, так и верхние характеристические классы гомотопически инвариантны.

Множество всех нижних (верхних) r-мерных характеристических классов ориентированных слоений коразмерности q составляет векторное пространство, обозначаемое через $\mathrm{Char}_r(q)$ (через $\mathrm{Char}^r(q)$); подчеркнем, что эти обозначения не общеприняты.

Результатом конструкции Годбийона — Вея — Бернштейна — Розенфельда — Мальгранжа — Хефлигера — Ботта являются гомоморфизмы

$$H^r(W_q;\ \mathbf{R}) \to \mathrm{Char}^r(q),$$
$$H^r(W_q,\ \mathfrak{o}(q);\ \mathbf{R}) \to \mathrm{Char}_r(q),$$

интерпретирующие элементы пространств $H^r(W_q;\ \mathbf{R})$, $H^r(W_q,\ \mathfrak{o}(q);\mathbf{R})$, описываемых теоремой п. 3, как характеристические классы слоений. В частности, образ естественной образующей пространства $H^3(W_1;\ \mathbf{R})$ при первом гомоморфизме (совпадающем при $q = 1$ с вторым), есть класс Годбийона — Вея.

Известны примеры, подтверждающие нетривиальность каждого из указанных гомоморфизмов. Эти примеры позволили впервые установить, что из изоморфности нормальных расслоений двух слоений не следует гомотопность этих слоений. Более того, как доказал Тэрстон [34*], на трехмерной сфере бывают слоения, класс Годбийона — Вея которых есть наперед заданный элемент группы $H^3(S^3;\ \mathbf{R})$; таким образом, *на трехмерной сфере имеется континуум попарно не гомотопных слоений коразмерности* 1.

Остается добавить, что теория характеристических классов слоений, стимулированная работами И. М. Гельфанда, переживает сейчас период быстрого развития. Нашли в ней свое место и результаты о когомологиях алгебр $\mathfrak{a}(M)$ (см. [30*]). Не известно, что из нее получится дальше, но уже сейчас можно сказать, что и здесь И. М. Гельфанд выступил в обычной для себя роли первопроходца.

ЛИТЕРАТУРА

[1] М. И. Вишик, А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, Г. Е. Шилов, Израиль Моисеевич Гельфанд (к пятидесятилетию со дня рождения), УМН 19:3 (1964), 187—204.

[2] А. Вейль. Основы теории чисел, М., «Мир», 1972.

[3] Жаке, Ленглендс, Автоморфные формы на GL_2, М., «Мир», 1973.

[4] I. M. Gelfand, D. A. Kajdan, Representations of $GL(n, K)$, Proc. of Summer Scool on Representation Theory, Hungary, 1971.

[5] Н. Н. Шаповалов, Об одной гипотезе Гельфанда — Кириллова, Функц. анализ 7:2 (1973), 93—94.

[6] А. А. Кириллов, Представления некоторых бесконечномерных групп Ли, Вестн. МГУ, № 1 (1974).

[7] J. Radon, Uber die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwärte längs gewisser Mannigfaltigkeiten, Ber. Verh. Sächs, Akad. 69 (1917), 262—277.

[8] F. John, Bestimmung liner Funktion aus ihren Integralen über gewisse Mannigfaltigkeiten, Math. Ann. 109 (1934), 488—520.

[9] И. М. Гельфанд, М. И. Граев, Н. Я. Виленкин, Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений, М., Физматгиз, 1962.
[10] И. М. Гельфанд, М. А. Наймарк, Унитарные представления классических групп, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова 36 (1950).
[11] И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, Обобщенные функции и действия над ними, М., Физматгиз, 1958.
[12] И. М. Гельфанд, М. И. Граев, Аналог формулы Планшереля для классических групп, Труды ММО 4 (1955), 375—404.
[13] И. Н. Бернштейн, С. И. Гельфанд, Мероморфность функции p^λ, Функц. анализ 3:1 (1963), 84—85.
[14] И. М. Гельфанд, М. И. Граев, Аналог теоремы Планшереля для вещественных унимодулярных групп, ДАН 92:3 (1953), 461—464.
[15] И. М. Гельфанд, М. И. Граев, Геометрия однородных пространств, представления групп в однородных пространствах и связанные с ними вопросы интегральной геометрии. Труды ММО 8 (1959), 321—390.
[16] С. Г. Гиндикин, Ф. И. Карпелевич, Об одной задаче интегральной геометрии. Сб. памяти Н. Г. Чеботарёва, Казань, 1964, 30—43.
[17] C. Chevalley, S. Eilenberg, Cohomology theory of Lie groups and Lie algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 63:1 (1948), 85—124.
[18] В. Н. Решетников, О когомологиях алгебр Ли гладких векторных полей с нетривиальными коэффициентами, ДАН 208:5 (1973), 1041.
[19] Теория алгебр Ли. Топология групп Ли, М., ИЛ, 1965.
[20] К. Годбийон, Когомология алгебр Ли формальных векторных полей. УМН 28:4 (172) (1973), 139—151.
[21] Б. И. Розенфельд, Когомологии некоторых бесконечномерных алгебр Ли, Функц. анализ 5:4 (1971), 84—85.
[22] Л. В. Гончарова, Когомологии алгебр Ли формальных векторных полей на прямой, Функц. анализ 7:2 (1973), 6—14; 7:3 (1973), 33—44.
[23] М. В. Лосик, О когомологиях алгебры Ли векторных полей с коэффициентами в тривиальном единичном представлении. Функц. анализ 6:1 (1972), 24—36.
[24] М. В. Лосик, Топологическая интерпретация гомологий диагонального комплекса алгебры Ли векторных полей с коэффициентами в тривиальном единичном представлении, Функц. анализ 6:3 (1972), 79—80.
[25] V. W. Guillemin, Remarks on some results of Gelfand and Fuks; Bull. Amer. Math. Soc. 78:4 (1972), 539—540.
[26] М. В. Лосик, О когомологиях бесконечномерных алгебр Ли векторных полей, Функц. анализ 4:2 (1970), 43—53.
[27] М. В. Лосик, О когомологиях алгебр Ли векторных полей с нетривиальными коэффициентами, Функц. анализ 6:4 (1972), 44—46.
[28] C. Godbillon, J. Vey, Un invariant des feuilletages de codimension un, C.R. Acad., Sci. (Paris) 273:2 (1971).
[29] И. Н. Бернштейн, Б. И. Розенфельд, О характеристических классах слоений, Функц. анализ 6:1 (1972), 68—69.
[30] A. Haefliger, Sur les classes caracteristique des feuilletages, Seminaire Bourbaki, 24e annee 1971/1972, n 412.
[31] R. Bott, A. Haefliger, On characteristic classes of Γ-foliations, Bull. Amer. Math. Soc. 78:6 (1972).
[32] Д. Б. Фукс, Характеристические классы слоений, УМН 28:2 (170) (1973), 3—18.
[33] И. Н. Бернштейн, Б. И. Розенфельд, Однородные пространства бесконечномерных алгебр Ли и характеристические классы слоений, УМН 28:4 (172), (1973), 103—138.
[34] W. Thurston, Non-cobordant foliations of S^3, Bull. Amer. Soc. 78:4 (1972), 511—514.