М. И. Вишик, А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, Г. Е. Шилов, Израиль Моисеевич Гельфанд (к пятидесятилетию со дня рождения), *УМН*, 1964, том 19, выпуск 3, 187–205

1964 г. май — июнь *т. XIX, вып. 3 (117)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ В СССР

ИЗРАИЛЬ МОИСЕЕВИЧ ГЕЛЬФАНД

(К пятидесятилетию со дня рождения)

20 августа 1963 г. исполнилось 50 лет со дня рождения Израиля Моисеевича Гельфанда, члена-корреспондента АН СССР, профессора МГУ, имя которого пользуется большой популярностью у нас и за рубежом.

Израиль Моисеевич родился 20 августа (7 августа) 1913 г. в м. Красные Окны Одесской области. В 1930 г., имея неполное среднее образование, Израиль Моисеевич приехал в Москву, где работал первое время на случайных местах (например, контролером у входа Ленинской библиотеки). В это же время он начал преподавание математики, сначала элементарной, а затем и высшей, на различных курсах и в вечерних институтах. Он начал посещать лекции и семинары по математике в МГУ; как он сам говорил, первой математической школой в его жизни был семинар М. А. Лаврентьева по теории функций комплексного переменного. В 1932 г. Израиль Моисеевич был принят в аспирантуру; его научным руководителем стал А. Н. Колмогоров, направивший Израиля Моисеевича на занятия функциональным анализом, которым в ту пору в Москве интересовался еще очень небольшой круг математиков. Большое значение в определении тем первых научных работ Израиля Моисеевича имели также беседы с Л. А. Люстерником и А. И. Плеснером.

Уже в самых первых работах Израиль Моисеевич получает результаты, вошедшие в «золотой фонд» функционального анализа. Так, в работе [2] доказана теорема: в полном нормированном пространстве всякое выпуклое замкнутое центрально симметричное множество, содержащее отрезок на каждом луче, исходящем из начала, содержит целый шар. В настоящее время аналогичное свойство является определением важного класса линейных топологических пространств («бочечных»).

Кандидатская диссертация Израиля Моисеевича «Абстрактные функции и линейные операторы» (1935 г.) содержит ряд теорем об общем виде линейных операторов в нормированных пространствах. Но, пожалуй, большее значение, чем сами эти теоремы, имел метод, разработанный Израилем Моисеевичем для их доказательства. Именно, применяя к функции $x(t)$ с значениями в нормированном пространстве E любой линейный функционал f, мы получаем обычную функцию, которую можно изучать средствами классического анализа; а поскольку в силу теоремы Хана — Банаха линейных функционалов в E достаточно много, это дает и достаточно полную информацию о самой абстрактной функции $x(t)$. Сейчас эти соображения кажутся само собой разумеющимися, но впервые они были развиты именно в диссертации Израиля Моисеевича. Следует также отметить его работу об однопараметрических группах операторов [9].

Однако наивысшим достижением Израиля Моисеевича в довоенные годы является созданная им теория коммутативных нормированных колец, составившая его докторскую диссертацию (1938 г.). Хотя нормированными кольцами математики занимались и до Гельфанда (Рисс, Нагумо, Мазур, Диткин), но только он обнаружил здесь то основное понятие, которое позволило сцементировать разрозненные до того факты и создать новую содержательную теорию — понятие максимального идеала. Теория нормированных колец И. М. Гельфанда позволила найти новые тесные связи между общим функциональным анализом Банаха и классическим анализом. Так, известная теорема Винера: если функция $x(t)$ разлагается в абсолютно сходящийся ряд Фурье и не обращается в нуль, то $\frac{1}{x(t)}$ обладает теми же свойствами — оказалась, по существу, алгебраической; доказательство ее, полученное Израилем Моисеевичем методом нормированных колец и умещающееся в пяти строчках, сразу продемонстрировало силу новой теории и обратило на нее внимание всего математического мира. Основная теорема теории об отображении любого коммутативного нормированного кольца в кольцо непрерывных функций на некотором бикомпакте остается до сих пор одним из крупнейших достижений функционального анализа. Отметим важную составную часть этой теоремы: полное кольцо R всех непрерывных функций на бикомпакте выделяется среди всех других тем, что в нем имеется инволюция $x(t) \to \overline{x(t)}$ — антилинейный автоморфизм $x \to x^*$ кольца R, обладающий тем свойством, что $|x^*x| = |x^*| \cdot |x|$ для любого $x \in R$.

Ближайшим некоммутативным аналогом кольца всех непрерывных функций на бикомпакте является кольцо линейных операторов в гильбертовом пространстве, где также имеется инволюция — переход к сопряженному оператору. И вот в следующей блестящей работе [16], совместной с М. А. Наймарком (1942 г.), Израиль Моисеевич показывает, что всякое нормированное (некоммутативное) кольцо с инволюцией может быть реализовано в виде некоторого кольца линейных операторов в гильбертовом пространстве с его естественной инволюцией. Эта работа послужила своего рода мостом между теорией нормированных колец и теорией бесконечномерных представлений групп, развитой И. М. Гельфандом совместно с М. А. Наймарком в послевоенные годы.

В рамках короткой статьи трудно было бы осветить всю научную деятельность Израиля Моисеевича, начавшуюся более тридцати лет тому назад и охватившую не только основные направления функционального анализа, но и теорию дифференциальных уравнений, задачи вычислительной математики, а за последние годы также физиологию и биокибернетику. Поэтому мы остановимся лишь на некоторых основных направлениях его деятельности.

Работы по теории представлений и автоморфным функциям

Алгебраические вопросы анализа всегда занимали важное место в научных интересах Израиля Моисеевича Гельфанда. В частности, еще в начале 40-х годов его внимание привлекла теория представлений непрерывных групп, в которой ему удалось угадать область, наиболее ярко сочетающую алгебраические и аналитические аспекты.

Теория конечномерных представлений, в основном применительно к конечным группам, была построена в работах Фробениуса и Шура. Фундаментальные исследования по конечномерным представлениям непрерывных групп принадлежат Э. Картану и Г. Вейлю. В частности, для представлений компактных групп исчерпывающая теория была построена в известной работе Петера и Вейля. Однако для групп не компактных положение здесь представлялось несравненно более сложным. С одной стороны, как оказалось, такие группы могут вообще не иметь нетривиальных унитарных конечномерных представлений, а с другой — при рассмотрении бесконечномерных представлений таких групп обнаружились существенные осложнения теоретико-множественной природы. Таким образом, даже сами постановки основных задач здесь не были ясны. Израилю Моисеевичу удалось найти здесь правильный путь. Он заметил, что фундаментальное значение имеют унитарные представления, и развил важную и глубокую теорию бесконечномерных унитарных представлений локально бикомпактных групп.

В 1943 г. И. М. Гельфанд и Д. А. Райков [17] показали, что у любой локально бикомпактной группы существует достаточно много неприводимых унитарных представлений в гильбертовом пространстве. После этого на очереди стала задача описать эти представления для наиболее важных групп. Было совершенно не ясно, возможно ли здесь достаточно явное описание хотя бы для таких групп, как группа комплексных матриц второго порядка.

В 1944—1948 гг. И. М. Гельфанд и М. А. Наймарк построили теорию бесконечномерных представлений классических комплексных групп Ли. Они установили, что неприводимые унитарные представления этих групп могут быть заданы простыми явными формулами. Сперва укажем полученные ими формулы представлений для случая группы G комплексных матриц второго порядка с определителем 1. У этой группы имеются две серии неприводимых унитарных представлений — основная и дополнительная. Представления основной серии строятся в пространстве функций $f(z)$, $z = x + iy$, с интегрируемым квадратом модуля. Оператор $T(g)$, соответствующий матрице $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, задается следующим образом:

$$T(g) f(z) = f\left(\frac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta}\right) |\beta z + \delta|^{is+n-2} (\beta z + \delta)^{-n}, \tag{1}$$

где n — целое число, s — вещественное число.

Представления дополнительной серии строятся в пространстве функций $f(z)$ с другим скалярным произведением; операторы представления задаются формулой (1), где $n = 0$, а $s = i\varrho$ — мнимое число — $2 \leqslant \varrho \leqslant 2$.

Заметим, что группа комплексных матриц второго порядка интересна не только как математический объект. Эта группа локально изоморфна группе Лоренца, и в силу этого результаты И. М. Гельфанда и М. А. Наймарка явились существенным вкладом в теоретическую физику (ранее Дираку удалось найти лишь отдельные представления этой группы).

Крупным достижением И. М. Гельфанда и М. А. Наймарка явилось отыскание многообразий, на которых наиболее естественно реализуются неприводимые представления классических комплексных групп Ли. Наиболее просто описываются эти многообразия в случае группы G всех линейных преобразований комплексного n-мерного пространства с определителем 1. В этом случае точками многообразия являются «флаги», т. е. последовательности линейных подпространств $H_1 \subset H_2 \subset \ldots \subset H_{n-1}$ (H_k обозначает k-мерное подпространство, $k = 1, \ldots, n-1$). Элементы g группы G естественным образом определяют преобразования $z \to zg$ в многообразии всех флагов. Операторы неприводимых представлений задаются в пространстве функций $f(z)$ формулой

$$T(g) f(z) = f(zg)\, \alpha(z, g),$$

где $\alpha(z, g)$ — некоторая просто описываемая функция, зависящая от $2n-2$ параметров (параметры представления). Если под флагом понимать цепочку подпространств с пропусками, например цепочку $H_1 \subset H_{n-1}$, то на получаемых многообразиях строятся аналогичным образом так называемые вырожденные представления группы G.

И. М. Гельфанд и М. А. Наймарк показали, что для неприводимых унитарных представлений классических групп можно определить след оператора $T(g)$ как обобщенную функцию на группе, и получили явную формулу для этой функции. Они доказали, что представление однозначно определяется своим следом, с точностью до эквивалентности.

После этих результатов естественно возникла задача описания унитарных представлений вещественных полупростых групп Ли. Эта задача полностью не решена и до сих пор, несмотря на усилия многих математиков. Однако в работах И. М. Гельфанда и М. И. Граева были получены важные результаты и в этом направлении. Было, в частности, установлено, что существует столько различных серий представлений, сколько существует неизоморфных максимальных абелевых подгрупп в группе, и что каждая такая серия реализуется в пространстве функций, аналитических по некоторым из переменных. В важнейших случаях были найдены формулы для характеров унитарных представлений. Хотя эти результаты были получены в основном на примере группы вещественных матриц n-го порядка, они пролили свет на ситуацию в общем случае.

Отметим также изящные работы И. М. Гельфанда и М. Л. Цетлина о конечномерных представлениях. В этих работах были явно описаны все конечномерные представления для унимодулярной и ортогональной групп.

Существенное место в работах И. М. Гельфанда заняли вопросы гармонического анализа на классических группах Ли. Если $f(g)$ — функция на группе G, то ее преобразованием Фурье естественно называть операторную функцию $T_\pi(f) = \int f(g) T_\pi(g) dg$, определенную на множестве неприводимых представлений $T_\pi(g)$ группы G. (Для случая, когда G — группа движений прямой, это определение совпадает с определением обычного преобразования Фурье.) Возникает задача получить формулу обратного преобразования Фурье. Эта задача была решена И. М. Гельфандом и М. А. Наймарком для классических комплексных групп Ли.

Другая задача гармонического анализа на классических комплексных группах Ли, решенная И. М. Гельфандом,— описание преобразования Фурье «достаточно хороших» функций на группе (аналог теоремы Пэли — Винера). Важность этой задачи в том, что ее решение вскрывает структуру пространства всех представлений группы. Именно, И. М. Гельфанд обнаружил, что преобразование Фурье функции $f(g)$, помимо естественных условий роста и аналитичности, удовлетворяет некоторым алгебраическим соотношениям. Эти алгебраические соотношения возникают в особых точках пространства представлений и связаны с существованием у группы G вырожденных (в частности, конечномерных) представлений. Одной из наиболее интересных областей гармонического анализа является теория зональных сферических функций. Проведем их определение. Пусть G— некоторая группа, U — ее подгруппа и T_g — неприводимое унитарное представление группы G, действующее в гильбертовом пространстве H. Если в H существует вектор ξ, инвариантный относительно операторов T_u и $\in U$, то функция $\varphi(g) = (\xi, T_g \xi)$ называется зональной сферической функцией. Классические зональные сферические функции соответствуют тому случаю, когда G — группа вращений сферы, а U — подгруппа вращений вокруг фиксированной оси. При другом выборе групп G и U можно получить много других специальных функций.

И. М. Гельфанд применил к изучению зональных сферических функций методы теории нормированных колец. Идея И. М. Гельфанда состоит в том, что он рассматривает кольцо функций на группе, постоянных на двусторонних классах смежности по подгруппе U. Это кольцо коммутативно в случае симметрического пространства G/U. Отсюда немедленно следует, что в пространстве любого неприводимого представления имеется не больше чем один вектор, инвариантный относительно операторов T_u, $u \in U$. Этот факт является фундаментом всей теории [1]). Доказывается, что зональные сферические функции $\varphi(g)$ задают гомоморфизмы кольца R в поле комплексных чисел:

$$M_\varphi(f) = \int f(g) \varphi(g) dg.$$

И. М. Гельфандом в этой связи были введены так называемые операторы Лапласа на группах, т. е. дифференциальные операторы, перестановочные с движениями и такие, что их собственными функциями служат сферические функции.

Одним из наиболее сильных результатов в теории сферических функций является полученное И. М. Гельфандом и М. А. Наймарком явное выражение

[1]) Для компактных симметрических пространств этот факт был установлен Э. Картаном.

для зональных сферических функций на некомпактных симметрических пространствах, связанных с комплексными группами Ли. Для вещественных групп Ли эти исследования были продолжены Бхану Нурти, Ф. И. Карпелевичем и С. Г. Гиндикиным.

Различные применения теории представлений обычно связаны с гармоническим анализом на однородных пространствах. Это относится, например, к изучению автоморфных функций, которое можно проводить в рамках гармонического анализа на однородном пространстве с дискретной стационарной группой.

В этой области И. М. Гельфанд и М. И. Граев предложили весьма эффективный метод орисфер. Этот метод позволил им построить гармонический анализ для ряда важных пространств. Сущность метода орисфер состоит в следующем. Пусть X — однородное пространство, в котором действует комплексная полупростая группа Ли G. Назовем орисферами в X траектории максимальной нильпотентной подгруппы группы G (в случае обычного пространства Лобачевского это определение эквивалентно обычному определению орисферы). Интегрируя функцию $f(x)$, $x \in X$, по всевозможным орисферам ω, мы получим функцию $\varphi(\omega)$ в пространстве всех орисфер. Это пространство орисфер устроено, вообще говоря, проще, чем исходное пространство X, и разложение функций $\varphi(\omega)$ по неприводимым представлениям осуществляется элементарно.

После этого остается решить задачу интегральной геометрии: по функции $\varphi(\omega)$ восстановить исходную функцию $f(x)$.

В последние годы И. М. Гельфанд и М. И. Граев занимались представлениями групп над произвольными полями. Здесь им удалось получить сильные результаты о представлениях групп Шевалле — Диксона над конечными полями (как известно, эти группы представляют собой группы матриц, аналогичные комплексным полупростым группам).

Успех в этой классической области, в которой работали многие математики, начиная с Фробениуса, связан с неожиданной возможностью применения к этим задачам методов бесконечномерных представлений.

Для группы матриц второго порядка над произвольным непрерывным локально компактным полем K И. М. Гельфанд и М. И. Граев получили единое для всех полей описание неприводимых унитарных представлений. Отметим, что в этом исследовании возникли многие интересные классы специальных функций на локально компактном поле.

Математические интересы И. М. Гельфанда всегда охватывали наряду с новыми областями области классические. Одной из таких областей является теория автоморфных функций. И. М. Гельфанду принадлежит замечательное соображение о том, что теория автоморфных функций является, по существу, частью теории представлений. Именно, почти все задачи теории автоморфных функций могут быть сформулированы в рамках следующей задачи теории представлений. Задано представление полупростой группы Ли G в пространстве функций $f(x)$, $x \in X$, где X — однородное пространство с дискретной стационарной подгруппой. Задача состоит в том, чтобы разложить это представление на неприводимые.

Еще в 1952 г. в работе И. М. Гельфанда и С. В. Фомина о геодезических потоках на многообразиях постоянной отрицательной кривизны было показано, что размерность пространства автоморфных форм равна кратности, с которой в заданное представление входит представление так называемой дискретной серии. В последние годы И. М. Гельфанд и И. И. Пятецкий-Шапиро начали систематическое изучение спектра представлений группы G в пространствах G/Γ, где G — произвольная полупростая группа Ли, Γ — ее дискретная подгруппа. В этом исследовании был успешно применен метод орисфер, о котором мы уже говорили.

С помощью метода орисфер пространство функций $f(x)$, $x \in G/\Gamma$ отображается в пространство функций $\varphi(\omega)$, заданных на множестве компактных орисфер. Тем самым изучение спектра представления распадается на две части: изучение спектра в пространстве функций $\varphi(\omega)$ и изучение спектра в ядре отображения $f(x) \to \varphi(\omega)$. Было показано, что ядро отображения $f(x) \to \to \varphi(\omega)$, т. е. пространство функций на G/Γ, интегралы которых по любой компактной орисфере равны нулю, имеет всегда дискретный спектр (см. Труды ММО, т. 12). Для изучения пространства функций $\varphi(\omega)$ были применены методы теории возмущений. Возникающие при этом аналоги квантовомеханической S-функции представляют собой очень важные теоретико-числовые функции типа дзета-функции Римана.

Для теории бесконечномерных представлений характерно сочетание алгебраических методов с широким применением аналитического аппарата. В свою очередь эта теория оказала большое влияние на проблемы анализа и нашла применение в ряде аналитических задач. Отметим в качестве характерного примера описание всех релятивистских инвариантных уравнений, данное И. М. Гельфандом и А. М. Ягломом [31].

Работы по дифференциальным уравнениям

Различные вопросы, связанные с дифференциальными уравнениями, привлекали внимание Израиля Моисеевича на протяжении многих лет. Среди них следует в первую очередь упомянуть о получивших широкую известность исследованиях И. М. Гельфанда и Б. М. Левитана по обратной задаче Штурма—Лиувилля.

Рассмотрим уравнение

$$y'' + (\lambda - q(x))\, y = 0 \tag{1}$$

на полуоси $[0, +\infty)$. Собственные функции $\varphi(x, \lambda)$этого уравнения обычно нормируются граничными условиями в нуле

$$\varphi(0, \lambda) = 1, \quad \varphi'(0, \lambda) = h. \tag{1'}$$

Разложение произвольной функции $f(x)$ в интеграл Фурье по собственным функциям задачи (1) при этом принимает вид

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda)\, \varphi(x, \lambda)\, d\varrho(\lambda),$$

где $\varrho(\lambda)$ — некоторая монотонная функция с точками роста на спектре.

Функцию $\varrho(\lambda)$ называют спектральной функцией задачи Штурма — Лиувилля. Под обратной задачей Штурма — Лиувилля понимают задачу об отыскании функции $q(x)$ в уравнении (1) по тем или иным спектральным характеристикам уравнения.

Обратной задачей в разных постановках занимались В. А. Амбарцумян, Г. Борг, Н. Левинсон, В. А. Марченко, М. Г. Крейн и ряд физиков. В частности, М. Г. Крейну в 1951 г. удалось решить обратную задачу по заданным двум спектрам уравнения (1), отвечающим разным граничным условиям на концах конечного интервала.

Наиболее плодотворной и общей оказалась обратная задача, состоящая в определении функции $q(x)$ в уравнении (1) по заданной функции $\varrho(\lambda)$.

Впервые обратной задачей в такой постановке занимались В. А. Марченко (1950 г.) и шведский математик Г. Борг, доказавшие, что данной функции $\varrho(\lambda)$ может соответствовать не более одной функции $q(x)$.

И. М. Гельфанду и Б. М. Левитану удалось найти линейное интегральное уравнение, связывающее функции $\varrho(\lambda)$ и $q(x)$. Это уравнение позволило не только решить вопрос о существовании функции $q(x)$, но и указать конструктивный способ ее определения.

В основу решения обратной задачи легла идея ортогонализации системы функции $\cos\sqrt{\lambda}x$ $(0\leqslant\lambda<\infty)$ по весу $\varrho(\lambda)$, подсказанная аналогией с проблемой моментов. Подобно тому как в проблеме моментов умножение на λ порождает в базисе их ортогональных многочленов якобиеву матрицу (конечноразностный аналог оператора Штурма—Лиувилля), в базисе из ортогонализованных косинусов появляется оператор Штурма—Лиувилля.

Эта работа вызвала большой интерес у математиков и физиков-теоретиков, откликнувшихся серией важных исследований (М. Г. Крейн, В. А. Марченко, Н. Левинсон, Л. Д. Фадеев, Джост и Кон, Ньютон, Кей и Мозес и др.).

Интерес физиков был вызван тем, что в квантовомеханической задаче рассеяния уравнение Гельфанда—Левитана сделало возможным определение потенциала поля по фазе рассеяния и позволило в радиально-симметричном случае до конца исследовать задачу.

Другой важный результат, полученный И. М. Гельфандом для оператора Штурма—Лиувилля,— это найденные им в сотрудничестве с Б. М. Левитаном и Л. А. Диким замечательные формулы следов для такого оператора, рассматриваемого на конечном интервале [54]. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — собственные значения уравнения (1) при граничных условиях $y(0)=y(\pi)=0$, и пусть $\int\limits_0^\pi q(x)dx=0$. Тогда имеет место равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_n-n^2)=-\frac{q(0)+q(\pi)}{4}. \tag{2}$$

Сходимость ряда (2) следует из классической асимптотики для λ_n, но возможность найти в явном виде его сумму явилась неожиданностью. Аналогичные формулы, содержащие целые степени λ_n, были выведены И. М. Гельфандом и Л. А. Диким в предположении, что функция $q(x)$ достаточно гладкая. Формулы следов могут быть использованы для численного определения первых собственных значений задачи. Эти работы были продолжены рядом авторов. В частности, Л. Д. Фадеев получил аналог формулы (2) в случае непрерывного спектра.

В теории гамильтоновых систем с периодическими по времени коэффициентами хорошо известна работа И. М. Гельфанда и В. Б. Лидского [60], в которой дано полное описание топологической структуры областей устойчивости для линейных гамильтоновых систем. Это исследование удалось провести благодаря алгебраизации задачи. В работе было показано, что каждой линейной гамильтоновой системе отвечает некоторая кривая $y(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant \omega)$ в группе G вещественных симплектических матриц, и обратно, каждой такой кривой соответствует некоторая гамильтонова система.

И. М. Гельфандом поставлен ряд проблем по теории дифференциальных уравнений с частными производными, которые в значительной степени повлияли на развитие ряда областей этой теории за последние два десятилетия. На семинаре, который проводил И. М. Гельфанд в 1945/46 г. в МГУ, им были поставлены задача об описании области определения замыкания дифференциальных операторов при соответствующих граничных условиях и задача о нахождении корректно поставленных краевых задач, например, для всех эллиптических дифференциальных уравнений. Эти проблемы впоследствии нашли достаточно полное решение в работах участников этого семинара М. И. Вишика и О. А. Ладыженской, а также в работах Л. Хёрмандера и ряда других математиков.

В статье [103] И. М. Гельфандом была поставлена задача о гомотопической классификации всех эллиптических в смысле И. Г. Петровского систем дифференциальных уравнений и краевых задач для них. Об этой проблеме И. М. Гельфанд говорил еще на семинаре 1945/46 г. Как известно, эллиптические краевые задачи нормально разрешимы в ограниченной области, т. е. соответствующая однородная задача имеет конечное число k линейно независимых решений, а неоднородная задача разрешима лишь при выполнении l дополнительных условий на правые части. Число $\varkappa = k-l$ называется индексом краевой задачи и является ее главным гомотопическим инвариантом. Для целого ряда случаев проблема И. М. Гельфанда была решена в работах А. И. Вольперта, А. С. Дынина, М. С. Аграновича и др. Общее ее решение было недавно дано в работах Атья и Зингера.

Работа [90] отличается от обычных математических статей. В ней много плодотворных идей, не всегда строго обоснованных. Отметим важное понятие эволюционности системы, которое оказало большое влияние на исследование структуры и устойчивости ударных волн обычной и магнитной гидрогазодинамики. Математическое исследование уравнений магнитной гидродинамики, намеченное в этой работе, было вообще одним из первых и оказало сильное влияние на все последующие исследования по этому вопросу. В статью включены также данная И. М. Гельфандом совместно с Я. Б. Зельдовичем постановка и решение задачи об установлении данной химической реакции, протекающей с образованием промежуточного продукта активных центров.

Теория обобщенных функций

И. М. Гельфанд был одним из первых советских математиков, оценивших значение и перспективы работ С. Л. Соболева, а затем Л. Шварца по теории обобщенных функций. В дальнейшем развитии этой теории работы Израиля Моисеевича, а также его учеников и сотрудников сыграли первостепенную роль. Уже в работе И. М. Гельфанда и Г. Е. Шилова [58] была осуществлена та идея, что обобщенные функции можно и нужно строить на различных пространствах основных функций, выбирая для каждого круга задач наиболее удобный класс пространств. Эта идея позволила сделать из теории обобщенных функций гибкий аппарат, нашедший применение в теории уравнений с частными производными, теории представлений, в случайных процессах, интегральной геометрии и т. д. Около десяти лет тому назад Израиль Моисеевич задумал серию монографий, посвященных применению идей и методов теории обобщенных функций в различных областях функционального анализа и смежных с ними. Сейчас эта серия «Обобщенные функции», в которой вышло уже пять книг, получила международное признание и известность; основное содержание серии составили результаты, полученные И. М. Гельфандом и его школой. Остановимся вкратце на содержании этих книг. Первые три выпуска этой серии, написанные И. М. Гельфандом и Г. Е. Шиловым, посвящены построению самого аппарата обобщенных функций, т. е. описанию различных классов основных пространств и соответствующих пространств линейных функционалов, построению теории преобразования Фурье для обобщенных функций. Эти классы пространств послужили основой для исследований по корректности и единственности задачи Коши для систем дифференциальных уравнений с частными производными.

В первом выпуске изложены также результаты И. М. Гельфанда и З. Я. Шапиро, относящиеся к обобщенным функциям нескольких переменных, в частности развита теория однородных обобщенных функций и обобщенных функций n переменных, сосредоточенных на многообразиях меньшего чем n числа измерений.

Израиль Моисеевич неоднократно высказывал мысль о том, что общую теорему о спектральном разложении самосопряженного оператора нельзя рассматривать как окончательное решение задачи спектрального анализа и что важно уметь строить наряду с соответствующими разложениями единицы и индивидуальные собственные функции (вообще говоря, обобщенные), отвечающие отдельным точкам спектра. Эта идея была реализована в работе И. М. Гельфанда и А. Г. Костюченко.

Более подробное изложение этого круга вопросов дано в третьем выпуске обобщенных функций.

Круг вопросов, рассмотренных в последних двух выпусках «Обобщенных функций», довольно сильно отличается от тематики первых трех выпусков, связанной в значительной мере с вопросами теории дифференциальных уравнений. Четвертый выпуск, написанный И. М. Гельфандом совместно с Н. Я. Виленкиным, в основном посвящен теории ядерных пространств, введенных А. Гротендиком. И. М. Гельфанд дал иную формулировку этого понятия и выяснил его важную роль в ряде вопросов, например при изучении мер в линейных пространствах. В связи с уже упоминавшейся выше задачей о нахождении обобщенных собственных функций самосопряженных (и унитарных) операторов И. М. Гельфандом было введено понятие так называемого оснащенного гильбертова пространства. Под этим понимается следующее.

Рассмотрим ядерное счетно-гильбертово пространство Ф, в котором, помимо скалярных произведений, определяющих топологию этого пространства, введено еще одно скалярное произведение. Пополнив Ф по этому новому скалярному произведению, мы получим гильбертово пространство H, в котором Ф образует всюду плотное множество. Рассмотрим еще наряду с Ф и H пространство Ф′ линейных функционалов на Ф. Тройка Ф, H, Ф′ и называется оснащенным гильбертовым пространством. Это понятие приводит к таким законченным и изящным результатам, как, например, следующий: всякий самосопряженный оператор в оснащенном гильбертовом пространстве обладает полной системой обобщенных собственных векторов, отвечающих вещественным собственным значениям.

Далее четвертый выпуск содержит теорию положительно определенных обобщенных функций (гл. 2), теорию обобщенных случайных процессов, построенную И. М. Гельфандом в 1955 г. и давшую точное математическое обоснование таким популярным у физиков понятиям, как, например, «белый шум», а также теорию меры в линейных топологических пространствах.

В пятом выпуске, написанном И. М. Гельфандом совместно с М. И. Граевым и Н. Я. Виленкиным, строится гармонический анализ на группе Лоренца и связанных с ней однородных пространствах (в частности, на трехмерном пространстве Лобачевского). В основу исследований положена интегральная геометрия. Интегральная геометрия, в том смысле как она понимается в книге, является новым направлением в функциональном анализе, связывающим его с классическими идеями геометрии. Сущность ее состоит в переходе от функций, заданных на множестве одних геометрических объектов, к функциям, заданным на множестве других объектов. Например, если функцию $f(x)$, заданную на гиперболоиде $x_0^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2=1$, интегрировать по всевозможным его прямолинейным образующим ω, то мы получим функцию $\varphi(\omega)$, заданную на множестве прямолинейных образующих. При этом возникает следующая задача интегральной геометрии: по функции $\varphi(\omega)$ восстановить исходную функцию $f(x)$. И. М. Гельфанд заметил, что многие задачи теории представлений легко могут быть сведены к решению подобных задач интегральной геометрии.

В книге дается решение ряда интересных задач интегральной геометрии. Некоторые из них не связаны непосредственно с теорией представлений. Так, в книге изучается простейшее преобразование интегральной геометрии, сопоставляющее функции в аффинном пространстве ее интегралы по гиперплоскостям. Это преобразование тесно связано с обычным преобразованием Фурье; однако оно более геометрично, и в этом его известное преимущество.

Работы по вычислительной математике физиологии

Весьма значительный вклад внес И. М. Гельфанд в развитие вычислительной математики. Ему принадлежат большие заслуги в изыскании общих методов численного решения уравнений математической физики, а также в решении конкретных прикладных задач.

И. М. Гельфанд совместно со своими сотрудниками существенно продвинул спектральную теорию устойчивости разностных операторов. Часть результатов этих работ изложена С. К. Годуновым и В. С. Рябеньким в их книге «Введение в теорию разностных схем», см. также [121]. В частности И. М. Гельфандом и К. И. Бабенко впервые был рассмотрен вопрос о влиянии границы на спектр разностного оператора. Требования устойчивости, как правило, приводят к необходимости использовать неявные разностные схемы. Поэтому возник вопрос о решении системы большого числа алгебраических уравнений. Для этой цели был применен простой устойчивый алгоритм, широко вошедший в вычислительную практику под названием «прогонка». Этот алгоритм позволяет разрешать неявную схему как в случае одномерных, так и многомерных задач.

И. М. Гельфанд первым понял фундаментальное значение для вычислительной математики методов исследования систем, описываемых большим числом переменных, в которых привычные методы анализа оказываются неэффективными. Большое внимание привлекла работа [74], в которой впервые был предпринят прямой расчет континуального интеграла.

Вычисление методом Монте-Карло средних по пространству траекторий частиц было использовано затем при решении задач физики переноса [89], [97]. Эти работы во многом стимулировали интерес к созданию квадратурных формул для интегралов большой кратности. Другим направлением в изучении сложных систем явились методы отыскания минимумов функций большого числа переменных [112]. И. М. Гельфандом был предложен нелокальный метод поиска минимумов (так называемый «метод оврагов»). Метод был использован для решения задач фазового анализа рассеяния нуклонов [108], [109], для расшифровки структуры кристаллических аминокислот [131], [132].

В последние годы И. М. Гельфанд проявляет глубокий интерес к изучению сложных физиологических систем. Ряд важных идей И. М. Гельфанда в этой области (континуальные управляющие системы и возбудимые среды, тактики построения движений [110], принцип наименьшего взаимодействия [120] и др.) сплотил вокруг него талантливый коллектив молодых физиологов.

Педагогическая деятельность

Говоря о творчестве И. М. Гельфанда как ученого, нельзя не сказать и о его педагогической деятельности. Тридцать лет тому назад, двадцатилетним юношей, Израиль Моисеевич начал преподавать в Московском государственном университете, где он продолжает работать и до сих пор. Чрезвычайно тесная связь между исследовательской работой и преподаванием является одной из характерных черт всей деятельности Израиля Моисеевича. Постановка новых задач, неожиданных вопросов, стремление взглянуть даже на хорошо известные вещи с новой точки зрения характеризуют Израиля Моисеевича как педагога, независимо от того, ведет ли он в данный момент разговор со школьниками или со своими товарищами по работе.

Первым по времени из учеников Израиля Моисеевича был Г. Е. Шилов, поступивший к нему в аспирантуру 25 лет тому назад. С тех пор Израиль Моисеевич воспитал десятки учеников, многие из которых уже стали крупными самостоятельными учеными. Помимо «прямых» учеников Израиля Моисеевича, проходивших у него аспирантуру, многие математики испытали в той или иной мере научное влияние Израиля Моисеевича, встречаясь с ним на лекциях, семинарах, в личных беседах. Широко известен руководимый Израилем Моисеевичем семинар по функциональному анализу, отметивший 20 лет своего существования как раз в тот день, когда его руководителю исполнилось пятьдесят. Этот семинар давно уже стал одним из основных центров развития функционального анализа и одним из центров воспитания математической молодежи.

Характерной чертой творческой деятельности Израиля Моисеевича является его умение организовать совместную, целеустремленную работу коллектива. Большое число работ Израиля Моисеевича написано им в сотрудничестве с его коллегами или учениками, часто совсем молодыми, для которых такая совместная работа являлась одновременно и чрезвычайно полезной школой. Таким образом, в деятельности Израиля Моисеевича отделить собственно исследовательскую работу от деятельности его как педагога и воспитателя молодежи практически невозможно.

Большой популярностью всегда пользовались лекции Израиля Моисеевича. Напоминая часто по форме живую беседу, они всегда требовали от слушателей активности и внимания, будили мысль слушателей, давая пищу для самостоятельных размышлений.

Широко известны учебники, написанные Израилем Моисеевичем по линейной алгебре, вариационному исчислению (совместно с С. В. Фоминым) и теории представлений групп (совместно с З. Я. Шапиро и Р. А. Минлосом).

Советские математики сердечно поздравляют Израиля Моисеевича и желают ему многих лет здоровья и новых замечательных успехов в науке.

М. И. Вишик, А. Н. Колмогоров,
С. В. Фомин, Г. Е. Шилов

СПИСОК ПЕЧАТНЫХ РАБОТ И. М. ГЕЛЬФАНДА

1936

1. Sur une lemme de la théorie des espaces linéaires, Изв. Научно-исслед. ин-та матем. Харьк. ун-та, серия 4, **13**, вып. 1, 35—40.

1937

2. К теории абстрактных функций, ДАН **17**, № 5, 237—240.
3. Операторы и абстрактные функции, ДАН **17**, № 5, 241—244.

1938

4. Abstrakte Funktionen und lineare Operatoren, Матем. сб. 4 (46) : 2, 235—286.

1939

5. О кольцах непрерывных функций, ДАН **22**, № 7, 11—15 (совм. с А. Н. Колмогоровым).
6. О нормированных кольцах, ДАН **23**, № 5, 430—432.
7. Об абсолютно сходящихся тригонометрических рядах и интегралах, ДАН **25**, № 7, 570—572.
8. О кольце почти периодических функций, ДАН **25**, 573—574.
9. Об однопараметрических группах операторов в нормированном пространстве, ДАН **25**, № 9, 711—716.

1940

10. К теории характеров коммутативных топологических групп, ДАН **28**, № 3, 195—198 (совм. с Д. А. Райковым).

1941

11. Нормированные кольца, Матем. сб. **9** (**51**) : 1, 3—24.
12. О некоторых способах введения топологии в множество максимальных идеалов нормированного кольца, Матем. сб. **9** (**51**) : 1, 25—40 (совм. с Г. Е. Шиловым).
13. Идеалы и примерные идеалы в нормированных кольцах, Матем. сб. **9** (**51**) : 1, 41—48.
14. К теории характеров абелевых топологических групп, Матем. сб. **9** (**51**) : 1, 49—50.
15. Об абсолютно сходящихся тригонометрических рядах и интегралах, Матем. сб. **9** (**51**) : 1, 51—56.

1943

16. О включении нормированного кольца в кольцо операторов в гильбертовом пространстве, Матем. сб. **12** (54) : 2, 197—217 (совм. с М. А. Наймарком).
17. Неприводимые унитарные представления локально бикомпактных групп, Матем. сб. **13** (**55**) : 2—3, 301—316 (совм. с Д. А. Райковым).

1944

18. Неприводимые унитарные представления локально бикомпактных групп, ДАН **42**, № 5, 203—205 (совм. с Д. А. Райковым).

1946

19. Unitary representations of the Lorenze group, Journ. of Phys. **10**, № 2, 93—94 (совм. с М. А. Наймарком).
20. Об унитарных представлениях комплексной унимодулярной группы, ДАН **54**, № 3, 194—198 (совм. с М. А. Наймарком).
21. Коммутативные нормированные кольца, УМН **1**, вып. 2 (12), 48—146 (совм. с Д. А. Райковым и Г. Е. Шиловым).
22. Унитарные представления группы линейных преобразований прямой ДАН **55**, № 7 571—574 (совм. с М. А. Наймарком).
23. Основная серия представлений комплексной унимодулярной группы, ДАН **56**, № 1 (совм. с М. А. Наймарком).
24. Унитарные представления группы Лоренца, Изв. АН **2**, 411—504 (совм. с М. А. Наймарком).
25. Унитарные представления полупростых групп Ли. I, Матем. сб. **21** (**63**) : 3, 405—434 (совм. с М. А. Наймарком).
26. Дополнительная и вырожденная серия унитарных представлений унимодулярной группы, ДАН 58, № 8, 1577—1580 (совм. с М. А. Наймарком).

1948

27. Лекции по линейной алгебре, М.—Л., Гостехиздат.
28. Нормированные кольца с инволюцией, Изв. АН, серия матем. **12**, 445—480 (совм. с М. А. Наймарком).
29. Общие релятивистски инвариантные уравнения и бесконечномерные представления группы Лоренца, ДАН **59**, 655—659 (совм. с А. М. Ягломом).
30. Интегральные уравнения, Статья в БСЭ.
31. Общие релятивистски инвариантные уравнения и бесконечномерные представления группы Лоренца, ЖЭТФ 18, № 8, 703—733 (совм. с А. М. Ягломом).
32. След в основных и дополнительных сериях представлений комплексной унимодулярной группы, ДАН **61**, № 1, 9—11 (совм. с М. А. Наймарком).
33. Релятивистски инвариантные уравнения, которым соответствует дефинитный заряд и дефинитная энергия, ДАН **63**, № 4, 371—374 (совм. с А. М. Ягломом).
34. Теорема Паули для общих релятивистски инвариантных уравнений, ЖЭТФ 18, № 12, 1096—1104 (совм. с А. М. Ягломом).
35. Зарядная сопряженность для общих релятивистски инвариантных уравнений, ЖЭТФ 18, № 12, 1105—1111 (совм. с А. М. Ягломом).
36. О связи между представлениями полупростой группы Ли и ее максимальной компактной подгруппы, ДАН **63**, № 6, 225—228 (совм. с М. А. Наймарком).
37. Аналог формулы Планшереля для комплексной унимодулярной группы, ДАН **63** № 6, 609—612 (совм. с М. А. Наймарком).

1950

38. Центр инфинитезимального группового кольца, Матем. сб. **26** (68) : 1, 103—112.
39. Связь между унитарными представлениями комплексной унимодулярной группы и ее унитарной подгруппы, Изв. АН **14**, 239—260 (совм. с М. А. Наймарком).
40. Сферические функции на симметрических римановых пространствах, ДАН **70**, № 1, 5—8.
41. Конечномерные представления группы унимодулярных матриц, ДАН **71**, № 5, 825—828 (совм. с М. Л. Цетлиным).
42. Конечномерные представления группы ортогональных матриц, ДАН **71**, № 6, 1017—1020 (совм. с М. Л. Цетлиным).
43. Разложение по собственным функциям уравнений с периодическими коэффициентами, ДАН **73**, № 6, 1117—1120.
44. Унитарные представления классических групп, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова **36**, 1—288 (совм. с М. А. Наймарком).

1951

45. Унитарные представления групп Ли и потоки геодезических на поверхностях постоянной отрицательной кривизны, ДАН **76**, № 6, 771—774 (совм. с С. В. Фоминым).
46. Лекции по линейной алгебре, изд. 2-е, перераб. и дополн., М.—Л., Гостехиздат.
47. Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции, Изв. АН, серия матем. **15**, 309—361 (совм. с Б. М. Левитаном).
48. Замечание к работе Н. К. Бари «Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве», Учен. зап. МГУ, вып. 140 (Матем.), **4**, 224—225.

1952

49. Представления группы вращений трехмерного пространства и их применения, УМН **7**, вып. 1, 3—117 (совм. с З. Я. Шапиро).
50. Геодезические потоки на поверхностях постоянной отрицательной кривизны, УМН **7**, вып. 1, 118—137 (совм. с С. В. Фоминым).

51. Унитарные представления унимодулярной группы, содержащие единичное представление унитарной подгруппы, Труды Моск. матем. об-ва **1**, 423—473 (совм. с М. А. Наймарком).
52. Унитарные представления вещественных простых групп Ли, ДАН **86**, № 3, 461—463 (совм. с М. И. Граевым).
53. О спектре несамосопряженных дифференциальных операторов, УМН **7**, вып. 6, 183—184.

1953

54. Об одном простом тождестве для собственных значений дифференциального уравнения, ДАН 88, № 4, 593—596 (совм. с Б. М. Левитаном).
55. Основная серия представлений вещественной унимодулярной группы, Изв. АН, серия матем. **17**, № 3, 189—249 (совм. с М. И. Граевым).
56. Об одном общем методе разложения регулярного представления группы Ли на неприводимые, ДАН **92**, № 2, 221—224 (совм. с М. И. Граевым).
57. Аналог теоремы Планшереля для вещественных унимодулярных групп, ДАН **92**, № 3, 461—464 (совм. с М. И. Граевым).
58. Преобразование Фурье быстрорастущих функций и вопросы единственности решения задачи Коши, УМН 8, вып. 6, 3—54 (совм. с Г. Е. Шиловым).

1954

59. Решение уравнений квантованных полей, ДАН **97**, № 2, 209—212 (совм. с Р. А. Минлосом).

1955

60. О структуре областей устойчивости линейных канонических дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, УМН **10**, вып. 1, 3—40 (совм. с В. Б. Лидским).
61. Обобщенные случайные процессы, ДАН **100**, № 5, 853—856.
62. Следы унитарных представлений вещественной унимодулярной группы, ДАН **100**, № 6, 1037—1040 (совм. с М. И. Граевым).
63. Аналог формулы Планшереля для классических групп, Труды Моск. матем. об-ва **4**, 375—404 (совм. с М. И. Граевым).
64. Однородные функции и их приложения, УМН **10**, вып. 3 (65), 3—70 (совм. с З. Я. Шапиро).
65. Об одном новом методе в теоремах единственности решения задачи Коши для систем линейных уравнений в частных производных, ДАН **102**, № 6, 1065—1068 (совм. с Г. Е. Шиловым).
66. Разложение по собственным функциям дифференциальных и других операторов, ДАН **103**, № 3, 349—352 (совм. с А. Г. Костюченко).

1956

67. Интегрирование в функциональных пространствах и его применения в квантовой физике, УМН **11**, вып. 1 (67), 77—114 (совм. с А. М. Ягломом).
68. О тождествах для собственных значений дифференциального оператора второго порядка, УМН **11**, вып. 1 (67), 191—198.
69. Несколько замечаний к теории сферических функций на симметричных римановых многообразиях, Труды Моск. матем. об-ва **5**, 311—351 (совм. с Ф. А. Березиным).
70. Quelques applications de la théorie des fonctions généralisées, Journ. de Math. pures et appl. **38**, 383—413 (совм. с Г. Е. Шиловым).
71. К общему определению количества информации, ДАН **111**, № 4, 745—748 (совм. с А. Н. Колмогоровым и А. М. Ягломом).

72. Некоторые проблемы функционального анализа, УМН **11**, вып. 6, 3—12.
73. Представления групп, УМН **11**, вып. 6, 13—40 (совм. с Ф. А. Березиным, М. И. Граевым и М. А. Наймарком).
74. О численном вычислении континуальных интегралов, ЖЭТФ **31**, вып. 6 (12), 1106—1107 (совм. с Н. Н. Ченцовым).
75. О величинах с аномальной четностью, ЖЭТФ **31**, вып. 6 (12), 1107—1109 (совм. с М. Л. Цетлиным).

1957

76. О вычислении количества информации о случайной функции, содержащейся в другой такой функции, УМН **12**, вып. 1 (73), 3—52 (совм. с А. М. Ягломом).
77. О подкольцах кольца непрерывных функций, УМН **12**, вып. 1 (73), 247—251.
78. Some aspects of functional analysis and algebra, Proc. of the International Congress of Math. 1954, Amsterdam **1**, 253—276.

1958

79. Обобщенные функции и действия над ними, М., Физматгиз (совм. с Г. Е. Шиловым).
80. Пространства основных и обобщенных функций, М., Физматгиз (совм. с Г. Е. Шиловым).
81. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений, М., Физматгиз (совм. с Г. Е. Шиловым).
82. Несколько замечаний о гиперболических системах, Научн. докл. высш. школы, № 1, 12—18 (совм. с К. И. Бабенко).
83. Представления группы вращений и группы Лоренца, М., Физматгиз (совм. с Р. А. Минлосом и З. Я. Шапиро).
84. Континуальные интегралы, Труды III Всесоюзного матем. съезда **3**, 521—531 (совм. с А. М. Ягломом и Р. А. Минлосом).
85. Представления групп Ли, Труды III Всесоюзного матем. съезда **3**, 246—254 (совм. с Ф. А. Березиным, М. И. Граевым, М. А. Наймарком).
86. Количество информации и энтропия для непрерывных распределений, Труды III Всесоюзного матем. съезда **3**, 300—320 (совм. с А. Н. Колмогоровым и А. М. Ягломом).
87. Теория систем дифференциальных уравнений с частными производными, Труды III Всесоюзного матем. съезда **3**, 65—72 (совм. с И. Г. Петровским и Г. Е. Шиловым).
88. Теория сжатия и пульсаций плазменного столба в мощном импульсном разряде, Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций **4**, 201—222 (совм. с С. И. Брагинским и Р. П. Федоренко).
89. Вычисление континуальных интегралов методом Монте-Карло, Изв. высш. учебн. завед., сер. матем., № 5 (6), 32—45 (совм. с Н. Н. Ченцовым и А. С. Фроловым).

1959

90. Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений, УМН **14**, вып. 2 (86), 87—158.
91. Теория представлений и теория автоморфных функций, УМН **14**, вып. 2 (86), 171—194 (совм. с И. И. Пятецким-Шапиро).
92. Некоторые вопросы анализа и дифференциальных уравнений, УМН **14**, вып. 3 (87), 3—19.
93. Геометрия однородных пространств, представления групп в однородных пространствах и связанные с ними вопросы интегральной геометрии, Труды Моск. матем. об-ва **8**, 321—390 (совм. с М. И. Граевым).
94. О разложении представлений группы Лоренца в пространствах функций, заданных на симметрических пространствах, на неприводимые представления, ДАН **127**, № 2, 250—253 (совм. с М. И. Граевым).
95. Об одной теореме Пуанкаре, ДАН **127**, № 3, 490—493 (совм. с И. И. Пятецким-Шапиро).

96. О структуре кольца быстро убывающих функций на группе Ли, ДАН **124**, № 1, 19—21 (совм. с М. И. Граевым).

1960

97. Применение метода случайных испытаний (метода Монте-Карло) для решения кинетического уравнения, Труды II Международной конференции по мирному использованию атомной энергии (Женева, 1958), т. 2, М., 628—633 (совм. с Н. Н. Ченцовым, С. М. Фейнбергом и А. С. Фроловым).
98. О положительно определенных обобщениях функций, УМН **15**, вып. 1 (91), 185—190 (совм. с Ся До-шином).
99. Интегральная геометрия и ее связь с теорией, УМН **15**, вып. 2 (92).
100. Преобразование Фурье быстро убывающих функций на комплексных полупростых группах, ДАН **131**, № 3, 496—499 (совм. с М. И. Граевым).
101. Некоторые применения гармонического анализа, оснащенные гильбертовым пространством, М., Физматгиз (совм. с Н. Я. Виленкиным).
102. О континуальных моделях управляющих систем, ДАН **131**, № 6 (совм. с М. Л. Цетлиным).
103. Об эллиптических уравнениях, УМН **15**, вып. 3 (93), 121—132.
104. По поводу статьи К. Гоффмана и И. М. Зингера, УМН **15**, вып. 3 (93), 239—240.
105. Коммутативные нормированные кольца, М., Физматгиз (совм. с Д. А. Райковым и Г. Е. Шиловым).
106. Интегралы по гиперплоскостям основных и обобщенных функций, ДАН **135**, № 6, 1307—1310 (совм. с М. И. Граевым).

1961

107. Вариационное исчисление, М., Физматгиз (совм. с С. В. Фоминым).
108. Фазовый анализ pp-рассеяния при 95 MN, ЖЭТФ **40**, вып. 1, 1106—1111 (совм. с Бором и др.).
109. Фазовый анализ pp-рассеяния при 150 MN, ЖЭТФ **40**, вып. 5, 1338—1342 (совм. с Ивановой).
110. Некоторые соображения о тактиках построения движений, ДАН **139**, № 5, 1250—1253 (совм. с М. Л. Цетлиным и В. С. Гуфинкелем).
111. Магнитные поверхности трехфазного винтового магнитного поля, возмущенного гофрированным полем, ЖТФ **31**, № 10, 1164—1169.

1962

112. О некоторых способах управления сложными системами, УМН **17**, вып. 1, 3—25 (совм. с М. Л. Цетлиным).
113. Пример теоретического определения магнитного поля, не обладающего магнитными поверхностями, ДАН **143**, № 1, 81—83 (совм. с Н. М. Зуевой, А. И. Морозовым и др.).
114. Применение метода орисфер к спектральному анализу функций в вещественном и мнимом пространстве Лобачевского, Труды Моск. матем. об-ва **11**, 243—308 (совм. с М. И. Граевым).
115. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений, М., Физматгиз (совм. с М. И. Граевым и Н. Я. Виленкиным).
116. Категория представлений группы и задача о классификации неприводимых представлений, ДАН **146**, № 4, 757—760 (совм. с М. И. Граевым).
117. Унитарные представления в однородных пространствах с дискретными стационарными группами, ДАН **147**, № 1, 17—20 (совм. с И. И. Пятецким-Шапиро).
118. Унитарные представления в пространстве G/Γ, где G — группа вещественных матриц n-го порядка, Γ — подгруппа целочисленных матриц, ДАН **147**, № 2, 275—278 (совм. с И. И. Пятецким-Шапиро).
119. Конструкция неприводимых представлений простых алгебраических групп над конечным полем, ДАН **147**, № 3, 529—532 (совм. с М. И. Граевым).

120. О тактиках управления сложными системами в связи с физиологией, Сб. работ «Биологические аспекты кибернетики», М., Изд-во АН СССР, 66—73 (совм. с М. Л. Цетлиным и В. С. Гурфинкелем).

121. О разностных схемах для решения уравнения теплопроводности. Метод «прогонки» для решения разностных уравнений. Дополнения I и II к книге С. К. Годунова и В. С. Рябенького «Введение в теорию разностных схем», М., Физматгиз (совм. с О. В. Локуциевским).

1963

122. Внутриклеточное раздражение различных отделов сердца лягушки, ДАН **148**, № 4, 973—976 (совм. с С. А. Ковалевым, Л. И. Чайлахяном).

123. О структуре магнитного тороидального поля, не обладающего магнитными поверхностями, ДАН **148**, № 6, 1286—1289 (совм. с М. И. Граевым, А. И. Морозовым и др.).

124. Неприводимые унитарные представления группы унимодулярных матриц второго порядка с элементами из локально компактного поля, ДАН **149**, № 3, 499—502 (совм. с М. И. Граевым).

125. Автоморфные функции и теория представлений, Труды Моск. матем. об-ва **12**, 389—412 (совм. с И. И. Пятецким-Шапиро).

126. Automorphic functions and the theory of representations, Proc. of the International Congress of Math. 1962, 74—85.

127. Формула Планшереля для группы унимодулярных матриц второго порядка с элементами из локально компактного поля, ДАН **151**, № 2, 262—264 (совм. с М. И. Граевым).

128. Представления группы матриц второго порядка с элементами из локально компактного поля и специальные функции на локально компактных полях, УМН **18**, вып. (112), 29—99 (совм. с М. И. Граевым).

129. О возможном механизме изменения иммунологической толерентности, Успехи совр. биологии **55**, вып. 3, 428—439 (совм. с А. Я. Фриденштейном).

130. О синхронизации двигательных единиц и связанных с нею представлениях, Биофизика 8, вып. 4, 475—486 (совм. с В. С. Гурфинкелем, Я. М. Коцем, М. Л. Цетлиным и М. Л. Шиком).

131. Отыскание структуры кристаллов с помощью метода нелокального поиска, ДАН **152**, № 5, 1045—1048 (совм. с И. И. Пятецким-Шапиро и Ю. Г. Федоровым).

132. Отыскание кристаллических структур методом минимализации R-фактора, ДАН **153**, № 1, 93—96 (совм. с Б. К. Вайнштейном, Р. А. Каюшиной и Ю. Г. Федоровым).