11. Представления

11.1. Доказать существенность условий теоремы Машке о полной приводимости (конечности группы, условия $\operatorname{char} k \nmid |G|$).

11.2. В n-мерном векторном пространстве V над полем k выберем базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ и зададим представление группы S_n на базисе как $\sigma.e_i = e_{\sigma(i)}$, продолжив его далее по линейности. Доказать, что подпространство $L \subset V$, порожденное вектором $e_1 + \cdots + e_n$ является инвариантным; подпространство W_{n-1}, порожденное векторами $e_1 - e_2, \ldots, e_1 - e_n$, также инвариантно. Ограничение построенного представления на W_{n-1} неприводимо над любым полем, а если $\operatorname{char} k \nmid n$, то $V = L \oplus W_{n-1}$.

11.3. Могут ли неприводимые комплексные представления конечной группы исчерпываться пятью одномерными и одним пятимерным?

11.4. Доказать, что всякое неприводимое комплексное представление конечной группы конечномерно.

11.5. Доказать, что всякое неприводимое представление абелевой группы над алгебраически замкнутым полем одномерно.

11.6. Доказать, что множество классов изоморфных одномерных представлений конечной группы G над фиксированным полем k образует группу относительно тензорного умножения (над k), причем обращение является переходом к сопряженному представлению, а единицей служит класс тривиального представления. Эта группа называется группой Пикара $\operatorname{Pic}_k(G)$. Доказать, что $\operatorname{Pic}_k(G) \cong \operatorname{Pic}_k(G/G')$, а если поле k алгебраически замкнуто, то $\operatorname{Pic}_k(G) \cong G/G'$. Можно ли ослабить условие алгебраической замкнутости, предположив, что в поле k имеется «достаточно много» корней из единицы. Описать поведение группы Пикара конечной абелевой группы при расширении поля. Попробовать сформулировать аналогичные утверждения для бесконечных групп.

11.7. Пусть V — конечномерное вещественное неприводимое представление группы G. Доказать, что его комплексификация $V^{\mathbb{C}}$ либо является неприводимым (комплексным) представлением, либо разлагается в прямую сумму двух неприводимых представлений одинаковой размерности: $V^{\mathbb{C}} = V \oplus \bar{V}$, где черта означает комплексное сопряжение. (Указание: воспользуйтесь тем, что комплексное подпространство $U \subset V^{\mathbb{C}}$ является комплексификацией подпространства $U' \subset V$ тогда и только тогда, когда $U = \bar{U}$.) Сформулировать и доказать аналог этого утверждения для произвольного расширения Галуа K/k.

11.8. Описать все неприводимые комплексные представления групп

$$Z_n,\ D_{2n},\ D_{2n+1},\ Q_8,\ A_3,\ S_4,\ A_4,\ S_3 \times S_3.$$

11.9. Описать все неприводимые вещественные представления группы Z_n.

11.10. Вычислить неприводимые характеры группы A_5.

11.11. Рассмотрим действие симметрической группы S_4 на алгебре плюккеровых координат:

$$P = \mathbb{C}[\,\pi_{ij} \mid 1 \leqslant i < j \leqslant 4\,]/(\pi_{12}\pi_{34} - \pi_{13}\pi_{24} + \pi_{14}\pi_{23})$$

по правилу $\sigma.\pi_{ij} = \pi_{\sigma(i)\sigma(j)}$, далее действие продолжается по линейности и мультипликативности (при этом $\pi_{ij} = -\pi_{ji}$). Разложить на неприводимые представления подпространство P_2 алгебры P, порожденное квадратичными мономами от плюккеровых координат.

11.12. Разложить регулярные комплексные представления групп S_3, Z_n, Q_8, D_n в прямую сумму неприводимых.

11.13. Пусть порядок неабелевой группы G есть куб простого числа. Найдите количество неприводимых комплексных представлений этой группы и количество классов сопряженных элементов в G.

11.14. Пусть группа G действует на конечном множестве X. Через $\mathcal{F}(X)$ обозначим пространство функций на X, а через χ — характер G-модуля $\mathcal{F}(X)$. Пусть χ_{id} — характер тривиального представления.

а) Доказать формулу Бернсайда

$$\langle \chi, \chi_{\mathrm{id}} \rangle = (\text{число орбит группы } G \text{ на } X).$$

б) Скалярный квадрат $\langle \chi, \chi \rangle$ равен числу орбит группы G в $X \times X$.

в) Предположим, что группа G действует на X дважды транзитивно. Тогда

$$\langle \chi, \chi \rangle = 2 \iff \chi = \chi' + \chi_{\mathrm{id}},$$

где χ' — характер неприводимого представления, и

$$\langle \chi, \chi \rangle = 3 \iff \chi = \chi' + \chi'' + \chi_{\mathrm{id}},$$

где χ', χ'' — характеры различных неприводимых представлений.

11.15. Пусть G — конечная группа, V — конечномерное векторное пространство над полем рациональных чисел, $\rho\colon G \to GL(V)$ — неприводимое представление группы G.

а) Доказать, что представление группы G в $V \otimes \mathbb{R}$ неприводимо над $\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда пространство G-инвариантных симметрических билинейных форм в $V \otimes \mathbb{R}$ одномерно.

б) Доказать, что значение характера представления группы G в пространстве $S^2(V)$ равно $\frac{1}{2}(\chi(g)^2 - \chi(g^2))$. (Указание: $V^{\otimes 2} = S^2(V) \oplus$ $\oplus \bigwedge^2(V)$.)

в) С помощью результата п. б) показать, что представление G неприводимо в $V \otimes \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда

$$\frac{1}{|G|} \sum \frac{1}{2} (\chi(g)^2 - \chi(g^2)) = 1.$$

г) Пусть $K = \mathrm{End}_G(V) = \{ f \in \mathrm{End}(V) \mid f\rho(g) = \rho(g) f \ \forall g \in G \}$. Доказать, что представление G в $V \otimes \mathbb{R}$ неприводимо тогда и только тогда, когда $K \otimes \mathbb{R}$ — алгебра с делением.

11.16. Найти все неприводимые комплексные представления группы A_5 и дать их геометрическое описание.

11.17. Комплексное представление V конечной группы G тогда и только тогда изоморфно своему сопряженному, когда характер χ_V принимает только вещественные значения.

11.18. Представление V группы G тогда и только тогда изоморфно своему сопряженному, когда существует ненулевая G-инвариантная форма на пространстве V. Если представление V неприводимо, то такая форма B_V единственна с точностью до множителя и либо симметрична, либо кососимметрична.

11.19. Пусть V — неприводимое комплексное представление конечной группы G с вещественным характером χ. Тогда

а) если форма B_V симметрична, то пространство V получается с помощью расширения поля скаляров $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$ из некоторого неприводимого вещественного представления $\tilde{V}$ с характером χ.

б) если форма B_V кососимметрична, то пространство V не происходит ни из какого вещественного. Ограничение поля скаляров до $\mathbb{R}$ определяет в этом случае вещественное неприводимое представление $V_{\mathbb{R}}$ с характером 2χ. Его централизатор изоморфен алгебре кватернионов.

11.20. Пусть G — абелева группа, $\mathcal{F}(G)$ — пространство комплекснозначных функций на G, $f \in \mathcal{F}(G)$ и T_γ — оператор сдвига на элемент $\gamma \in G$: $(T_\gamma f)(g) = f(\gamma g)$. Доказать, что характеры группы G суть собственные векторы оператора T_γ. Найти соответствующие собственные значения.

11.21. Разложить в прямую сумму неприводимых естественное представление группы S_4 в пространстве функций на множестве вершин куба.

11.22. Изоморфны ли алгебра кватернионов и вещественная групповая алгебра группы кватернионных единиц Q_8?

11.23. Можно ли восстановить с точностью до изоморфизма конечную группу по следующим данным:

а) по количеству неизоморфных неприводимых комплексных представлений каждой размерности,

б) по групповой алгебре,

в) по таблице умножения неприводимых представлений (имеется в виду тензорное умножение представлений и последующее разложение произведения в сумму неприводимых)?

По каким из этих данных восстанавливается конечная абелева группа?