Задачи по алгебре к 08 сентября 2003 г.

1. Сформулируйте и докажите теорему Жордана–Гельдера в категории модулей над кольцом.

2. Пусть p и q простые. Докажите, что a) нильпотентная группа разрешима; b) всякая p-группа разрешима; c) всякая группа порядка $p^n q$, где $p > q$ разрешима.

3. Пусть G — группа порядка p^n. Докажите, что a) $\forall k \leqslant n$ найдется подгруппа $H \subset G$ порядка p^k; b) любая подгруппа порядка p^{n-1} в G нормальна.

4. Докажите, что все группы порядка < 60 разрешимы.

5. Пусть p и q простые. a) Докажите, что любая группа порядка p^2 абелева.
Опишите все группы порядка b) pq; c) p^3.

6. Докажите, что если $G = G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_{m-1} \supset G_m = 1$ — центральный ряд, то a) $Z_s G \subset G_s \subset Z^{m-s} G$; b) верхний и нижний центральные ряды обрываются и их длины не превосходят m; c) длины верхнего и нижнего центральных рядов совпадают.

7. Докажите, что следующие условия эквивалентны: (i) группа G нильпотентна; (ii) верхний центральный ряд группы G обрывается; (iii) нижний центральный ряд группы G обрывается.

8. Опишите все силовские 2-подгруппы в группе $\mathfrak{S}_4$.