Анализ-1. **13.11.03**

В следующих задачах рассматривается ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $a_n, z \in \mathbb{C}$.

1. Докажите, что если ряд сходится в точке $z_0 \neq 0$, то он сходится и в круге $|z| < |z_0|$. Верно ли, что на отрезке $[0; z_0]$ он представляет непрерывную функцию ? А в круге $|z| \leq |z_0|$?

2. (Коши-Адамар) Пусть $\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, $R \in [0; \infty]$. Докажите, что ряд сходится в круге $|z| < R$ и расходится в любой точке z : $|z| > R$.

3. Может ли степенной ряд ряд расходиться а) ровно в одной точке; b) во всех точках границы круга сходимости ?

4. Получить формулу n-го члена последовательности, заданной рекуррентно: $a_0 = 1, a_1 = \beta, a_{n+1} = \theta a_n + \gamma a_{n-1}, n \geq 1$.

Определение. Пусть (X, d) - метрическое пространство. Тогда $A \subset X$ называется *компактным (соотв. предкомпактным)*, если каждая (бесконечная) последовательность точек имеет предельную точку (соотв. содержит фундаментальную подпоследовательность). Множество $\Sigma \subset X$ является *ε-сетью* $(\varepsilon > 0)$ для множества $B \subset X$, если $\forall b \in B\ \exists s \in \Sigma :\ d(b, s) \leq \varepsilon$.

1. Докажите, что предкомпактное множество ограничено.

2. Множество A предкомпактно, титтк $\forall \varepsilon > 0$ имеется конечная ε-сеть для A.

3. Докажите предкомпактность ограниченных подмножеств $\mathbb{R}^n$.

4. Докажите, что подмножество полного метрического пространства компактно титтк оно замкнуто и $\forall \varepsilon > 0$ для него имеется конечная ε-сеть.

5. Из любого открытого покрытия компактного множества можно извлечь конечное подпокрытие. Эквивалентно ли это свойство компактности ?

6. Всякая последовательность вложенных непустых компактных подмножеств метрического пространства имеет общую точку.

7. Верно ли, следующее утверждение: любая непрерывная функция $f : X \to \mathbb{R}$, X – компакт, ограничена и достигает своего минимального и максимального значения?

8. Пусть (X, d) – метрическое пространство, $F(X)$ – класс всех замкнутых подмножеств X. Можно ли на $F(X)$ ввести метрику h: $\forall x, y \in X\ h(\{x\}, \{y\}) = d(x, y)$? Покажите, что если X – компактно, то метрику можно ввести таким образом, что $(F(X), h)$ – компакт.