ЛЕКЦИЯ 1. СИНГУЛЯРНЫЕ ГОМОЛОГИИ.

Стандартным q-мерным симплексом мы будем называть множество $T_q = \{(x_0, \dots, x_q) \in \mathbb{R}^{q+1} \mid x_0 \geq 0, \dots, x_q \geq 0, x_0 + \dots + x_q = 1\}$. Всякому подмножеству $S = \{s_0, \dots, s_p\} \subset \{0, \dots, q\}$ соответствует *грань* $T_S = \{(x_0, \dots, x_q) \in T_q \mid x_i = 0 \forall i \in S\}$ симплекса. В частности, если $S = \{0, \dots, q\} \setminus \{s\}$, то $T_S = \{(0, \dots, 1, \dots, 0)\}$ (единица на s-м месте) состоит из одной точки — вершины симплекса T_q.

Очевидно, грань T_S симплекса сама является $(q-p)$-мерным симплексом. Точнее говоря, существует естественное отображение $\Lambda_S : T_S \to T_{q-p}$, вычеркивающее из строки $(x_0, \dots, x_q) \in T_S$ все координаты x_i такие, что $i \in S$ — все эти координаты равны нулю, так что соответствие взаимно однозначное.

Пусть X — топологическое пространство. q-мерным сингулярным симплексом пространства X называется непрерывное отображение $f : T_q \to X$. Группой q-мерных сингулярных цепей пространства X (обозначение $\mathcal{C}_q(X)$) называется свободная абелева группа, порожденная множеством q-мерных сингулярных симплексов, т.е. множество формальных линейных комбинаций $\sum_{i \in I} k_i f_i$, где I — произвольное конечное множество, $k_i \in \mathbb{Z}$, а f_i — сингулярный симплекс.

Оператор границы $\partial_q : \mathcal{C}_q(X) \to \mathcal{C}_{q-1}(X)$ определяется для сингулярного симплекса f равенством $\partial_q f = \sum_{s=0}^{q} (-1)^s \left. f\right|_{T_{\{s\}}} \circ \Lambda_{\{s\}}^{-1}$. На произвольные сингулярные цепи оператор ∂ продолжается по линейности (являясь, тем самым, гомоморфизмом групп). Цепь $\sigma \in \mathcal{C}_q(X)$ называется циклом, если $\partial_q \sigma = 0$, и границей, если существует $\tau \in \mathcal{C}_{q+1}(X)$ такая, что $\partial_{q+1} \tau = \sigma$.

Предложение 1. $\partial_q \circ \partial_{q+1} = 0$.

Доказательство. Достаточно доказать равенство для $(q+1)$-мерного сингулярного симплекса f. Действительно, $\partial_q \partial_{q+1} f = \sum_{s=0}^{q+1} (-1)^s \partial_q \left. f\right|_{T_{\{s\}}} \circ \Lambda_{\{s\}}^{-1} = \sum_{0 \leq s \leq q+1} \left(\sum_{0 \leq t \leq s-1} (-1)^{s+t} \left. f\right|_{T_{\{s,t\}}} \Lambda_{\{s,t\}}^{-1} + \sum_{s+1 \leq t \leq q} (-1)^{s+t-1} \left. f\right|_{T_{\{s,t\}}} \Lambda_{\{s,t\}}^{-1} \right)$. Эта сумма равна нулю, поскольку каждое слагаемое в ней встречается дважды с противоположным знаком. □

Обозначим $\mathcal{Z}_q(X)$ и $\mathcal{B}_q(X)$ множества q-мерных сингулярных циклов и границ соответственно. Из предложения 1 следует, что $\mathcal{B}_q(X) \subset \mathcal{Z}_q(X)$; факторгруппа $H_q(X) = \mathcal{Z}_q(X)/\mathcal{B}_q(X)$ называется группой q-мерных сингулярных гомологий пространства X.

Это определение представляет собой частный случай следующей алгебраической ситуации. Пусть $A = \dots \xrightarrow{\partial_{q+1}} A_q \xrightarrow{\partial_q} A_{q-1} \xrightarrow{\partial_{q-1}} \dots$ — *цепной комплекс*, т.е. последовательность абелевых групп и гомоморфизмов, обладающая свойством $\partial_q \circ \partial_{q+1} = 0$ для всех q. Тогда группа $H_q(A) = \operatorname{Ker} \partial_q / \operatorname{Im} \partial_{q+1}$ называется группой q-мерных гомологий этого комплекса.

Пример 1. Пусть X — линейно связное пространство. Тогда $\mathcal{C}_0(X) = \{\sum_{i \in I} k_i a_i\}$ — абелева группа, порожденная точками X. На нульмерных цепях дифференциал тривиален, так что $\mathcal{Z}_0(X) = \mathcal{C}_0(X)$. Стандартный симплекс T_1 — отрезок с концами A, B, откуда следует, что для произвольного сингулярного симплекса $f : T_1 \to X$ его граница есть $f(B) - f(A)$. Нетрудно видеть, что $\mathcal{B}_0(X)$ состоит из тех линейных комбинаций $\sum_{i \in I} k_i a_i$, для которых $\sum_{i \in I} k_i = 0$. Отсюда вытекает равенство $H_0(X) = \mathbb{Z}$. В общем случае $H_0(X)$ — абелева группа, порожденная компонентами линейной связности пространства X.

Под гомоморфизмом $\varphi : A \to B$ комплексов понимается набор гомоморфизмов $\varphi_q : A_q \to B_q$ таких, что $\varphi_{q-1} \circ \partial_q^A = \partial_q^B \circ \varphi_q$ для всех q. Из этого равенства следует, что $\varphi_q(\operatorname{Ker} \partial_q^A) \subset \operatorname{Ker} \partial_q^B$ и $\varphi_q(\operatorname{Im} \partial_{q+1}^A) \subset \operatorname{Im} \partial_{q+1}^B$, и, следовательно, определен гомоморфизм $(\varphi_*)_q : H_q(A) \to H_q(B)$. Нетрудно видеть, что так определенная операция обладает такими свойствами: $(\varphi \circ \psi)_* = \varphi_* \circ \psi_*$, $\mathrm{id}_* = \mathrm{id}$, м $(\varphi^{-1})_* = \varphi_*^{-1}$.

Пусть $\varphi : X \to Y$ — непрерывное отображение топологических пространств. Ему соответствует гомоморфизм цепных комплексов $\varphi_* : \mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(Y)$, сопоставляющий произвольному сингулярному симплексу $f : T_q \to X$ сингулярный симплекс $\varphi \circ f : T_q \to Y$. Соответствующее отображение в гомологиях тоже обозначается φ_*.

Предложение 2. *Если отображения $\varphi_0 : X \to Y$ и $\varphi_1 : X \to Y$ гомотопны, то соответствующие отображения в гомологиях $(\varphi_0)_* : H_q(X) \to H_q(Y)$ и $(\varphi_1)_* : H_q(X) \to H_q(Y)$ совпадают.*

Для доказательства предложения 2 нам потребуется следующая

Лемма. *Пусть $\varphi : A \to B$ — гомоморфизм цепных комплексов, а ι — цепная гомотопия, т.е. набор гомоморфизмов $\iota_q : A_q \to B_{q+1}$ таких, что $\partial_{q+1}^B \circ \iota_q + \iota_{q-1} \circ \partial_q^A = \varphi_q$ для всех q. Тогда отображение $\varphi_* : H_q(A) \to H_q(B)$ — нулевое для всех q.*

Доказательство. Пусть $a \in A_q$ и $d_q^A a = 0$. Тогда $\varphi_q a = \partial_{q+1}^B \iota_q a + \iota_{q-1} \partial_q^A a = \partial_{q+1}^B \iota_q a \in \operatorname{Im} \partial_{q+1}^B$. ☐

Доказательство. [предложения 2] Согласно лемме, достаточно построить цепную гомотопию $\iota : \mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(Y)$ для отображения $(\varphi_0)_* - (\varphi_1)_*$ между этими же комплексами. Пусть $\varphi_y : X \to Y$ — гомотопия между отображениями φ_0 м φ_1. Разобьем произведение $T_q \times [0,1]$ на $(q+1)$-мерные симплексы $\Delta_0, \dots, \Delta_q$, где $\Delta_i = \{(x_0, \dots, x_q, t) \in T_q \times [0,1] \mid x_0 + \dots + x_{i-1} \le t \le x_0 + \dots + x_i\}$. Вершинами симплекса Δ_i являются точки $p_0^{(i)}, \dots, p_q^{(i)} \in T_q \times [0,1]$, где $p_s^{(i)} = (0, \dots, 1, \dots, 0, \tau_s^{(i)})$, где 1 стоит на s-м месте, а $\tau_s^{(i)} = 1$ при $s \le i$, и $\tau_s^{(i)} = 0$ при $s > i$. Существует единственное аффинное взаимно однозначное отображение $\Lambda_i : T_{q+1} \to \Delta_i$, переводящее s-ю вершину стандартного симплекса в $p_s^{(i)}$.

Для произвольного сингулярного q-симплекса $f : T_q \to X$ определим отображение $\Phi_f : T_q \times [0,1] \to X$ равенством $\Phi_f(x,t) = \varphi_t(f(x))$. Теперь положим по определению $\iota_q f = \sum_{s=0}^{q} (-1)^i \, \Phi_f|_{\Delta_i} \circ \Lambda_i$. Непосредственная проверка показывает, что ι — искомая цепная гомотопия. ☐

Следствие. *Гомологии гомотопически эквивалентных пространств изоморфны.*

Пример 2. Гомологии точки (и, как следствие, любого стягиваемого пространства). Здесь для каждого q имеется единственный сингулярный симплекс $f_q : T_q \to pt$, так что $\mathcal{C}_q(pt) = \mathbb{Z}$. Оператор границы $\partial_q = 0$ при q нечетном и $q = 0$ и $\partial_q = \mathrm{id}$ при четных $q > 0$. Отсюда следует, что $H_0(pt) = \mathbb{Z}$, и $H_q(pt) = 0$ при $q > 0$.