Анализ, листок 4 (осень 2006, 1 семестр)

Компактность; связность

1. Докажите, что полуинтервал $[0;1)$ негомеоморфен отрезку $[0;1]$.

2. а) Приведите пример взаимно однозначного непрерывного отображения хаусдорфовых пространств, не являющегося гомеоморфизмом.

б) Приведите такой пример для случая, когда оба пространства линейно связны.

3. Пусть $X \subset \mathbb{R}^2$ — объединение графика функции $y = \sin(1/x)$ при $x > 0$ и отрезка, соединяющего точки $(0;-1)$ и $(0;1)$. Докажите, что X связно, но не линейно связно.

4. Докажите, что всякое открытое подмножество в $\mathbb{R}$ является не более чем счетным объединением непересекающихся открытых интервалов.

5. Пусть $f(z) = a_n z^n + \ldots + z_0$ — многочлен с комплексными коэффициентами. Докажите, что функция $z \mapsto |f(z)|$ принимает на $\mathbb{C}$ наименьшее значение. (Если $\deg f > 0$, то это наименьшее значение, как известно, равно нулю.)

6. Пусть f — многочлен от двух переменных с действительными коэффициентами. Верно ли, что функция $(x,y) \mapsto |f(x,y)|$ принимает на $\mathbb{R}^2$ наименьшее значение?

7. Докажите, что для любых двух выпуклых многоугольников на плоскости существует прямая, делящая каждый из них на две равновеликие части. (Можно пользоваться без доказательства фактами из школьного курса планиметрии.)

8. а) Докажите, что отрезок негомеоморфен окружности.

б) Докажите, что отрезок негомеоморфен квадрату на плоскости (множеству $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant x \leqslant 1\}$).

в) Докажите, что окружность негомеоморфна квадрату.

9. Букетом n окружностей называется топологическое пространство, получаемое следующим образом: берется несвязное объединение n окружностей, на каждой из них выбирается по точке, и все эти точки склеиваются в одну (продумайте формальное определение самостоятельно). Докажите, что букет m окружностей негомеоморфен букету n окружностей при $m \neq n$.

10. Пусть $X \subset \mathbb{R}^2$ — бесконечное ограниченное множество. Докажите, что существует бесконечная последовательность различных точек $\{P_n\}$, где все $P_i \in X$, обладающая тем свойством, что ломаная $P_1 P_2 \ldots P_n \ldots$ выпукла (т.е. лежит по одну сторону от каждого своего звена).

11. Докажите, что если пространство со счетной базой секвенциально компактно, то оно компактно.

12*. Приведите пример секвенциально компактного пространства, не являющегося компактным.