Геометрия: листок 5. Сферическая геометрия (6 октября 2014)

Большая окружность на сфере — это сечение сферы плоскостью, проходящей через центр. *Геодезическая*, соединяющая точки A и B на сфере, — это меньшая часть большой окружности, проходящей через эти точки (через диаметрально противоположные точки сферы проходит бесконечно много геодезических).

Задача 1. Докажите, что длина геодезической, соединяющей данные точки, меньше длины любой кривой, составленной из дуг больших окружностей, соединяющей эти точки.

Сферический треугольник — это три точки (среди которых нет диаметрально противоположных), попарно соединённые геодезическими.

Пусть O — центр сферы. Угол при вершине A сферического треугольника ABC равен величине двугранного угла между полуплоскостями OAB и OAC (прямая OA — общая граница этих полуплоскостей).

Сферическому треугольнику ABC на сфере с центром O можно сопоставить *полярный* ему сферический треугольник $A'B'C'$ следующим образом: точки A' и A лежат по одну сторону от плоскости OBC и $OA' \perp OBC$.

Задача 2. Докажите, что если треугольник $A'B'C'$ полярен треугольнику ABC, то треугольник ABC полярен треугольнику $A'B'C'$.

В дальнейшем предполагается, что радиус сферы равен 1.

Задача 3. Докажите, что если углы сферического треугольника равны α, β и γ, а его стороны равны a, b и c, то углы полярного треугольника равны $\pi - a$, $\pi - b$ и $\pi - c$, а стороны полярного треугольника равны $\pi - \alpha$, $\pi - \beta$ и $\pi - \gamma$.

Задача 4. Докажите, что два сферических треугольника равны, если равны их углы.

Пусть углы сферического треугольника равны α, β и γ, а противолежащие им стороны равны a, b и c.

Задача 5. Докажите, что площадь сферического треугольника равна $\alpha + \beta + \gamma - \pi$.

Задача 6. Докажите, что $\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}$ (теорема синусов).

Задача 7. Докажите, что $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$ (первая теорема косинусов).

Задача 8. Докажите, что $\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a$ (вторая теорема косинусов).

Задача 9. Найдите длину сферической окружности радиуса r и площадь сферического круга радиуса r.

Задача 10. Докажите, что: а) биссектрисы; б) медианы сферического треугольника пересекаются в одной точке.

Задача 11. Пусть O — центр сферы, A, B и C — точки сферы (не диаметрально противоположные).

а) Докажите, что большая окружность, перпендикулярная вектору $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}$, проходит через точки A и B.

б) Докажите, что большая окружность, перпендикулярная вектору $(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}) \times \overrightarrow{OC}$, проходит через точку C и перпендикулярна сферической прямой AB.

в) Докажите, что если векторы $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ компланарны, то сферические окружности, перпендикулярные этим векторам, имеют общую точку.

г) Докажите, что высоты сферического треугольника (или их продолжения) имеют общую точку.