Геометрия: листок 9. Многомерная геометрия (10 ноября 2014)

Задача 1. Докажите, что существует двумерная плоскость, пересекающая четырёхмерный симплекс, но не пересекающая ни одного его ребра.

Задача 2. Докажите, что существует сечение n-мерного куба, являющееся правильным $2n$-угольником.

Задача 3. Одна из вершин параллелепипеда находится в начале координат, а концы выходящих из неё рёбер имеют координаты $(a_{11}, \ldots, a_{1n})$, $(a_{21}, \ldots, a_{2n})$, $\ldots$, $(a_{n1}, \ldots, a_{nn})$. Докажите, что объём этого параллелепипеда равен абсолютной величине определителя матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Задача 4. Докажите, что объём n-мерного симплекса в $n!$ раз меньше объёма параллелепипеда, одна из вершин которого — вершина симплекса, а другие вершины симплекса являются концами выходящих из этой вершины рёбер параллелепипеда.

Задача 5. Расстояние между вершинами n-мерного симплекса с номерами i и j равно d_{ij}. Докажите, что квадрат объёма этого симплекса равен $\frac{(-1)^{n+1}}{(n!)^2 2^n} \begin{vmatrix} 0 & d_{12}^2 & \ldots & d_{1n}^2 & 1 \\ d_{21}^2 & 0 & \ldots & d_{2n}^2 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ d_{n+1,1}^2 & d_{n+1,2}^2 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 \end{vmatrix}$ (определитель Кэли–Менгера).

Задача 6. а) Докажите, что если любые две вершины выпуклого многогранника в трёхмерном пространстве соединены ребром, то этот многогранник — тетраэдр.

б) Докажите, что если вершины выпуклого многогранника расположены на кривой (t, t^2, t^3, t^4), то любые две его вершины соединены ребром.

Задача 7. Докажите, что правильные многогранники в четырёхмерном пространстве могут иметь лишь следующие символы Шлефли: $\{3,3,3\}$, $\{3,3,4\}$, $\{4,3,3\}$, $\{3,4,3\}$, $\{5,3,3\}$, $\{3,3,5\}$.

Задача 8. Докажите, что при $n \geqslant 5$ правильные многогранники в n-мерном пространстве могут иметь лишь следующие символы Шлефли: $\{3, \ldots, 3\}$, $\{3, \ldots, 3, 4\}$, $\{4, 3, \ldots, 3\}$.

Задача 9. Докажите, что любое собственное ортогональное преобразование в 4-мерном пространстве можно представить в виде $q \mapsto sqr$, где s и r — кватернионы длины 1.