Задачи по алгебре. 1 курс. 15 февраля 2005 г.

1) Доказать, что если подгруппа $H \subset G$ имеет индекс 2, то она нормальна.
2) Найти все нормальные подгруппы групп а) S_3; б) S_4.
3) Доказать, что $S_4/V_4 \cong S_3$, где $V_4 = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ — «четверная группа Клейна».
4) Доказать, что если A — циклическая группа порядка n и d — делитель n, то A содержит ровно одну подгруппу порядка d, причем эта подгруппа циклическая.
5) Доказать, что любая группа четного порядка содержит хотя бы один элемент порядка 2.
6) Доказать, что симметрическая группа S_n изоморфна группе, заданной образующими $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$ и соотношениями $s_i^2 = e$ (для $i = 1, \ldots, n-1$), $(s_i s_{i+1})^3 = e$ (для $i = 1, \ldots, n-2$) и $(s_i s_j)^2 = e$ (для $|i-j| > 1$)
   а) при $n = 3$; б)* при любом n.
7) Перечислить все группы порядка $\leqslant 6$ с точностью до изоморфизма.
8)* Пусть p — наименьшее простое число, делящее порядок конечной группы G, $H \subset G$ — подгруппа индекса p. Доказать, что H — нормальная подгруппа в G.