Задачи по алгебре. 1 курс. 1 марта 2005 г.

1) Поставим в соответствие каждой матрице A из $M_{m\times n}$ следующую линейную функцию на пространстве $M_{n\times m}$: $\varphi_A(X) = \mathrm{tr}(AX)$.
   а) Доказать, что таким образом устанавливается изоморфизм пространства $M_{m\times n}$ с пространством $M^*_{n\times m}$.
   б) Отождествим $M_{n\times n}$ с $M^*_{n\times n}$ с помощью этого изоморфизма. Чему равен аннулятор пространства матриц со следом 0?
2) а) В алгебре $M_2(\mathbb{R})$ найти подалгебру, изоморфную полю $\mathbb{C}$.
   б) В алгебре $M_2(\mathbb{C})$ найти подалгебру, изоморфную телу кватернионов.
3) Доказать, что любая конечномерная ассоциативная алгебра с единицей над полем $\Bbbk$ изоморфна подалгебре алгебры матриц $M_n(\Bbbk)$ (для некоторого $n \in \mathbb{N}$).
4) а) Найти все (с точностью до изоморфизма) двумерные ассоциативные алгебры с единицей над полем вещественных чисел.
   б) Для каждой из них найти все неразложимые модули.
5) Как классифицировать четверки одномерных подпространств в двумерном векторном пространстве?
6) Пусть $\Lambda^\bullet = \Lambda^\bullet(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4)$ — алгебра Грассмана над полем $\Bbbk$. Элемент $\omega \in \Lambda^2$ называется разложимым, если найдутся $\beta^1, \beta^2 \in \Lambda^1$ такие, что $\omega = \beta^1 \wedge \beta^2$. Для произвольных $a, b, c, d, x \in \Bbbk$ рассмотрим следующий элемент из Λ^2:
$$\omega = \xi^1 \wedge \xi^2 + a\xi^1 \wedge \xi^3 + b\xi^1 \wedge \xi^4 + c\xi^2 \wedge \xi^3 + d\xi^2 \wedge \xi^4 + x\xi^3 \wedge \xi^4.$$
   Пусть a, b, c, d — фиксированы. При каких x элемент ω является разложимым?
7) Рассмотрим в грассмановой алгебре $\Lambda^\bullet(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ над полем $\Bbbk$ следующие элементы: $\beta^1 = \xi^1 + \xi^2$, $\beta^2 = \xi^2 + \xi^3$ и $\beta^3 = \xi^1 + a\xi^3$. При каких значениях a моном $\xi^1 \wedge \xi^2$ принадлежит подалгебре, порожденной β^1, β^2 и β^3?