ПОРИЗМ ПОНСЕЛЕ.

Задача 1. а) Докажите, что множество $A = \{[x : y : z] \in \mathbb{C}P^2 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 0\} \subset \mathbb{C}P^2$ — комплексная кривая (комплексное многообразие размерности 1). б) Приведите пример однородного многочлена $Q(x, y, z)$ степени 2, для которого множество $A_Q = \{[x : y : z] \in \mathbb{C}P^2 \mid Q(x, y, z) = 0\} \subset \mathbb{C}P^2$ (квадрика) комплексной кривой не является. в) Напишите необходимое и достаточное условие на многочлен Q, при котором квадрика A_Q гладкая (является комплексной кривой).

Задача 2. а) Докажите, что отображение $f : A \to \mathbb{C}P^1$, заданное равенством $f([x : y : z]) = [x : y]$, является разветвленным накрытием (мероморфной функцией). б) Найдите количество листов этого накрытия и опишите его точки ветвления. в) Докажите, что $A = \mathbb{C}P^1$. г) Докажите, что если квадрика $A_Q \subset \mathbb{C}P^2$ гладкая, то она биголоморфно эквивалентна $\mathbb{C}P^1$.

Задача 3. а) Введите структуру комплексного многообразия в множестве всех комплексных проективных прямых в $\mathbb{C}P^2$. б) Докажите, что это многообразие биголоморфно эквивалентно $\mathbb{C}P^2$ (обозначение: $(\mathbb{C}P^2)^\vee$). в) Докажите, что множество прямых, касательных к $A \subset \mathbb{C}P^2$, является комплексной кривой, биголоморфно эквивалентной $\mathbb{C}P^1$. г) Докажите то же самое утверждение для произвольной гладкой квадрики $A_Q \subset \mathbb{C}P^2$ (обозначение: $A_Q^\vee$).

Задача 4. а) Пусть A_1, A_2 — две гладких квадрики в $\mathbb{C}P^2$, не имеющие в точках пересечения общих касательных. Докажите, что они имеют 4 общих точки. б) Пусть $S = \{(x, \ell) \in A_1 \times A_2^\vee \mid x \in \ell\}$, и $p_1 : S \to A_1$, $p_2 : S \to A_2^\vee$ — естественные проекции. Найдите количество листов отображений p_1, p_2 и опишите их точки ветвления. в) Докажите, что S — комплексная кривая. г) Докажите, что род S равен 1.

Пусть ω_1, ω_2 — две окружности, причем ω_2 лежит внутри ω_1. Определим *отображение Понселе* $f : \omega_1 \to \omega_1$ условием, что прямая, соединяющая точки x и $f(x)$, касается ω_2, и причем ω_2 лежит справа от прямой.

Задача 5. а) Продолжите f до биголоморфного автоморфизма квадрики A_1, соответствующей окружности ω_1. б) Продолжите f до биголоморфного автоморфизма кривой S из задачи 4б (квадрика A_2 соответствует окружности ω_2). в) Пусть $f^n(x) = x$ для некоторой точки $x \in \omega_1$. Докажите, что $f^n = \mathrm{Id}$.

Задача 6. Чем можно заменить окружности в определении отображения Понселе ?