29.03.07

Листок №9

О нильпотентных элементах кольца A

Элемент $f \in A$ называется нильпотентным, если $f^N = 0$ (для каждого f, вообще говоря, свое N).

1. Нильпотентные элементы образуют идеал N, который содержится в любом простом идеале.

2. Наоборот, если f принадлежит любому простому идеалу, то f нильпотентен.

О локализации $\overline{S}$

3. Точная последовательность $M' \to M \to M''$ переходит в точную последовательность $\frac{M'}{S} \to \frac{M}{S} \to \frac{M''}{S}$

4. $\frac{M_1+M_2}{S} = \frac{M_1}{S} + \frac{M_2}{S}$

5. $\frac{M_1 \cap M_2}{S} = \frac{M_1}{S} \cap \frac{M_2}{S}$

6. $\frac{M/N}{S} = \frac{M}{S}/\frac{N}{S}$ (изоморфизмы $\frac{A}{S}$ модулей)

Тензорное произведение A-модулей. Расширение кольца скаляров

$M \otimes_A N = \{$тензорное произведение абелевых групп плюс $a(m \otimes n) = am \otimes n = m \otimes an\}$

Пусть A' надкольцо кольца A и M – A-модуль. Рассматривая A' как A-модуль образуем тензорное произведение $A' \otimes_A M$ и введем в него структуру A'-модуля, полагая $b'(a' \otimes m) = b'a' \otimes m$, $a', b' \in A'$, $m \in M$.
Полученный модуль $M^{A'}$ есть результат операции с названием "Расширение кольца скаляров".

7. Пусть A-модуль M обладает одним из перечисленных свойств: свободен, проективен, распадается в прямую сумму. Верно, что таков же и модуль $M^{A'}$?

8. Если $L \geq K \geq F$ – башня полей ($[L : F] < \infty$) и V - векторное пространство над F, то $L \otimes_K (K \otimes_F V) = L \otimes_F V$

9. Доказать, что $\frac{M}{S} = M \otimes \frac{A}{S}$.

10. Пусть I и J идеалы кольца A. Изоморфны ли A-модули $I \otimes J$ и IJ?

11. Тензорное произведение алгебр.
Пусть A и B – конечномерные алгебры над полем F (с единицами 1_A и 1_B). Зададим в векторном пространстве $A \otimes_F B$ умножение по формуле
$(\sum a_i \otimes b_i)(\sum a_i' \otimes b_i') = \sum a_i a_i' \otimes b_i b_i$
$a_i, a_i' \in A$, $b_j, b_j' \in B$.
Доказать, что так введенная операция корректна и превращает $A \otimes_F B$ в F-алгебру (это можно сделать элементарной выкладкой или через универсальное свойство $\otimes$. Полезно продумать оба способа).

12. Если L надполе поля K, то $L \otimes_K K[x]/(p(x)) \simeq L[x]/(p(x))$ (изоморфизм L-алгебр).

13. $M_q(K) \otimes M_p(K) = M_{pq}(K)$.

14. Пусть $\mathbb{H}$ – алгебра вещественных гамильтоновых кватернионов. Доказать, что $\mathbb{H} \otimes \mathbb{C} \simeq M_2(\mathbb{C})$.

Задачи ЕГЭ по алгебре

15. Является ли алгебра $T = \mathbb{Q}(\sqrt{-3}) \otimes \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ полем? А алгебра $T = \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \otimes \mathbb{Q}(\sqrt{2})$?
В каком случае алгебра $T = K \otimes L$ является полем? (K и L – конечные расширения поля F, $charF = 0$).

16. Проективно ли тензорное произведение проективных модулей?
Свободно ли тензорное произведение свободных?
Нетерово ли тензорное произведение нетеровых?

17. Пусть $N' \to N \to N'' \to 0$ точная последовательность A-модулей. Всегда ли точна последовательность $N' \otimes M \to N \otimes M \to N'' \otimes M \to 0$?