Математический анализ, 2 семестр: листок 1

Рассмотрим отображение $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. Предположим что функции $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы достаточное число раз. Производные этих функций по t мы будем обозначать через $\dot{x}$ и $\dot{y}$. Вектор $v(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ называется ***вектором скорости*** в момент времени t. Отображение γ называется ***гладкой кривой***, если $v(t) \neq 0$ для всех $t \in \mathbb{R}$.

1. *Касательная* к кривой γ в точке $(x(t_0), y(t_0))$ определяется как прямая L, такая, что расстояние от точки $(x(t), y(t))$ до L равно $o(t - t_0)$ при $t \to t_0$. (Напомним, что $\alpha(t) = o(t - t_0)$ при $t \to t_0$, если $\lim_{t \to t_0} \alpha(t)/(t - t_0) = 0$). Найдите уравнение касательной к γ в точке $(x(t_0), y(t_0))$.

2. *Длиной* участка $\gamma[t_0, t_1]$ кривой γ называется число

$$L_\gamma[t_0, t_1] = \int_{t_0}^{t_1} |v(t)|\, dt.$$

Здесь $|v(t)|$ — это длина вектора $v(t)$. Докажите, что это число не зависит от параметризации, то есть если $\phi : [\tau_0, \tau_1] \to [t_0, t_1]$ — гомеоморфизм (дифференцируемый на (τ_0, τ_1), причем производная продолжается до непрерывного отображения из $[\tau_0, \tau_1]$ в $[t_0, t_1]$) то $L_{\gamma \circ \phi}[\tau_0, \tau_1] = L_\gamma[t_0, t_1]$.

3. На всякой гладкой кривой γ можно ввести параметр s, такой что $s = L_\gamma[0, s]$. Такой параметр называется *натуральным*. Параметр t является натуральным тогда и только тогда, когда $|\dot{\gamma}(t)| = 1$.

4. Пусть s — натуральный параметр на кривой $\gamma(s) = (x(s), y(s))$. Положим $v(s) = \frac{d}{ds}\gamma(s)$, $a(s) = \frac{d}{ds}v(s)$ (производная вектор-функции вычисляется покомпонентно). Докажите, что векторы $v(s)$ и $a(s)$ перпендикулярны.

5. Функция $\kappa(s) = |a(s)|$ называется *кривизной* кривой γ. Положим $n(s) = a(s)/\kappa(s)$. Докажите, что $\frac{d}{ds}n(s) = -\kappa(s)v(s)$ (*формула Френе*).

6. Пусть s — натуральный параметр на кривой $\gamma(s) = (x(s), y(s))$, причем $\gamma(0) = (0, 0)$ и $v(0) = (1, 0)$. Выпишите многочлены Тэйлора для $x(s)$ и $y(s)$ степени три в терминах функции $\kappa(s)$ и ее производных.

7. Пусть кривизна кривой γ в точке $\gamma(s_0)$ отлична от нуля: $\kappa(s_0) \neq 0$. Найдите окружность δ, для которой $|\gamma(s) - \delta(s)| = o((s - s_0)^2)$. Здесь мы предполагаем, что s является натуральным параметром на окружности δ.

8. Найдите формулу для кривизны кривой $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ через производные функций $x(t)$ и $y(t)$. Параметр t не обязательно натуральный. Посчитайте кривизну параболы $y = x^2$ как функцию от x.

9. Пусть s — натуральный параметр на кривой $\gamma(s)$, причем $\gamma(s + 1) = \gamma(s)$ (то есть кривая γ замкнута). Докажите, что

$$\int_0^1 (Ax(s) + By(s) + C)\frac{d\kappa(s)}{ds} ds = 0$$

для любых постоянных A, B и C.

10. *Теорема о четырех вершинах.* Докажите, что на любой замкнутой гладкой кривой не менее четырех *вершин*, то есть таких точек $\gamma(s)$, для которых $\frac{d}{ds}\kappa(s) = 0$.