Комплексный анализ, листок 1

Элементарные функции

Напомним, что экспонента от комплексного числа определяется по формуле

$$e^z = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^j}{j!},$$

а синус и косинус — по формулам

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Логарифмы и корни определить на всем $\mathbb{C}$ невозможно, но на всяком *односвязном* множестве $U \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ можно определить (не одним способом!) функцию, обратную к $z \mapsto z^n$ или $z \mapsto e^z$; всякую такую функцию называют «логарифмом» или «корнем n-й степени» (точнее говоря, «однозначной ветвью» логарифма или корня).

1. Докажите, что: а) $e^z = e^w$ тогда и только тогда, когда $z - w = 2\pi i n$, где $n \in \mathbb{Z}$; б) решения уравнений $\sin z = 0$ и $\cos z = 0$ над $\mathbb{C}$ — такие же, как над $\mathbb{R}$.

Будем говорить, что $f(a) = \infty$, если $\lim_{z \to a} |f(z)| = \infty$; через $f(\infty)$ будем обозначать $\lim_{|z| \to \infty} f(z)$ (если этот предел существует). Через $\overline{\mathbb{C}}$ обозначим «сферу Римана» — множество $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

2. Существует ли предел $\lim_{|z| \to \infty} f(z)$ для следующих функций f: а) многочлен степени n; б) $f(z) = \sin z$; в) $f(z) = e^z$?

Пусть $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ — невырожденная матрица с комплексными коэффициентами; она определяет *дробно-линейное отображение* из $\overline{\mathbb{C}}$ в $\overline{\mathbb{C}}$, заданное формулой $z \mapsto (az + b)/(cz + d)$. Как известно, дробно-линейные отображения переводят прямые и окружности в прямые и окружности.

3. Постройте дробно-линейное отображение, задающее взаимно однозначное отобаржение единичного круга $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ на верхнюю полуплоскость $H = z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0$.

4. Докажите, что всякое нетождественное дробно-линейное отображение (рассматриваемое как отображение из $\overline{\mathbb{C}}$ в $\overline{\mathbb{C}}$) имеет либо одну, либо две неподвижные точки.

5. Докажите, что всякое дробно-линейное отображение сопряжено (с помощью дробно-линейного отображения) либо отображению вида $z \mapsto z + a$, где $a \in \mathbb{C}$, либо отображению вида $z \mapsto \lambda z$, где $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

6. Докажите, что дробно-линейное отображение переводит верхнюю полуплоскость H в себя тогда и только тогда, когда его можно задать матрицей $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ с вещественными коэффициентами и положительным определителем.

7. Найдите образ полосы $U_{a,b} = \{z \mid a < \mathrm{Im}(z) < b\}$ при отображении $f(z) = e^z$; при каких a и b отображение f будет взаимно однозначно на $U_{a,b}$?

8. Найдите образ полуплоскости $H_a = \{z \mid \mathrm{Re}(z) > a\}$ при отображении $f(z) = z^2$. При каких a отображение f будет взаимно однозначно на H_a?

9. Найдите образ множества $U_a = \{z \mid |z| > a\}$ при отображении $z \mapsto z+(1/z)$; при каких a это отображение будет взаимно однозначно на U_a?

10. Постройте элементарную функцию, взаимно однозначно отображающую угол $\{z \mid -\pi/6 < \arg(z) < \pi/6\}$ на верхнюю полуплоскость (элементарная функция — это то, что получается композицией из рациональных функций, экспонент, корней и логарифмов).

11. Постройте элементарную функцию, взаимно однозначно отображающую полукруг $\{z \mid \mathrm{Im}(z) > 0, |z| < 1\}$ на верхнюю полуплоскость.

12. Постройте элементарную функцию, взаимно однозначно отображающую единичный круг с центром в нуле на полосу $\{z \mid 0 < \mathrm{Re}(z) < 1\}$.

13. Пусть P — многочлен степени n с комплексными коэффициентами и Γ — такая окружность с центром в нуле, что все корни P лежат внутри Γ. Сколько оборотов вокруг нуля делает образ этой окружности при отображении $z \mapsto P(z)$?

14. Нарисуйте образ окружности с центром 3 и радиусом 4 при отображении $z \mapsto z^2 + z + 1$.

15. Тот же вопрос, что в предыдущей задаче, для окружности радиуса 4 с центром в нуле и отображения $z \mapsto \sin z$.