

КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ

Михаил Скопенков, Всеволод Шевчишин

3. Интегрирование

3.1. Вычислите следующие интегралы:

$$(1) \int_{\gamma} z^k \bar{z}^l dz \text{ с } k, l \in \mathbb{Z}; \quad (2) \int_{\gamma} \sin \frac{1}{z} dz; \quad (3) \int_{\gamma} \tan \frac{1}{z} dz;$$

где $\gamma := \{(x, y) : x^2 + y^2 = R^2\}$ — окружность радиуса R , проходимая против часовой стрелки.

3.2. Будет ли точка $z = 0$ устранимой особой точкой для функции

$$(1) f(z) = \frac{\sin z - z}{z^3}; \quad (2) f(z) = \frac{\cos z - 1}{z^3}; \quad (3) f(z) = e^{-1/z^2}?$$

3.3. Для каждой из следующих функций f , найдите ее вычеты во всех изолированных особых точках:

$$(1) f(z) = \frac{1}{z - z^5}; \quad (2) f(z) = \frac{1}{z^3 - z^5}; \quad (3) f(z) = \cot \pi z; \quad (4) f(z) = \sin z \sin(1/z).$$

3.4. Вычислите интеграл $\int_{\gamma} \frac{dz}{\sin^2 z \cos z}$ вдоль окружности $\gamma := \{(x, y) : x^2 + y^2 = 100\}$, проходимой против часовой стрелки.

3.5. Вычислите следующие интегралы:

$$(1) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+1}{x^4+1} dx; \quad (2) \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx; \quad (3) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx; \quad (4) \int_0^1 \sqrt{x(1-x)} dx.$$

3.6. Пусть многочлен степени $n > 1$ имеет n различных комплексных корней a_1, \dots, a_n . Докажите равенство

$$\frac{1}{P'(a_1)} + \dots + \frac{1}{P'(a_n)} = 0.$$

Результаты участников курса

Сергея Кузьмичев	1.1–1.2, 2.1(12), 2.2(12), 2.3(1)
Вова Медведев	1.0, 1.1ab, 1.3±, 1.4–1.5, 1.7, 1.8±, 1.10, 2.0
Света Макарова	1.0, 1.1ab, 1.2bc, 1.3–1.5, 1.8–1.10, 2.0, 2.1(12)
Георгий	2.0
Артур Томберг	1.0
Саша Викторова	1.0
Вика Малясова	1.0, 1.1ab, 1.3–1.4, 1.7–1.8, 1.10, 2.1–2.2, 2.4(12)
Дима	1.3±, 1.4±, 1.6+ / 2
Леня Тимин	1.7, 1.8±, 1.10
Артем Приходько	1.1–1.4, 1.8, 2.0, 2.2(2)±

E-mail address: skopenkov@rambler.ru