Топология-1, семинар 13, 04.05.2015.

Задача 1. Докажите следующее утверждение, известное как *лемма о 5 гомоморфизмах* или просто *5-лемма*. Пусть

$$\begin{tikzcd} G_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & G_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & G_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & G_4 \arrow[r] \arrow[d, "f_4"] & G_5 \arrow[d, "f_5"] \\ H_1 \arrow[r] & H_2 \arrow[r] & H_3 \arrow[r] & H_4 \arrow[r] & H_5 \end{tikzcd}$$

— коммутативная диаграмма групп и гомоморфизмов, строки которой являются точными последовательностями. Тогда

а) если f_2 и f_4 — мономорфизмы, а f_1 — эпиморфизм, то f_3 — мономорфизм;
б) если f_2 и f_4 — эпиморфизмы, а f_5 — мономорфизм, то f_3 — эпиморфизм.

Таким образом, если f_1, f_2, f_4, f_5 — изоморфизмы, то и f_3 — изоморфизм.

Задача 2. Введите отображения и докажите точность *гомотопической последовательности тройки* (X, A, B) (где $A \subset B \subset X$):

$$\ldots \xrightarrow{\partial} \pi_n(A, B, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, B, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, B, x_0) \xrightarrow{i_*} \ldots$$
$$\ldots \xrightarrow{i_*} \pi_1(X, B, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_1(X, A, x_0)$$

Задача 3. Используя бесконечное расслоение Хопфа $p\colon S^\infty \to \mathbb{C}P^\infty$ со слоем S^1 докажите, что $\pi_2(\mathbb{C}P^\infty) \cong \mathbb{Z}$ и $\pi_k(\mathbb{C}P^\infty) = 0$ при $k \neq 2$.

Задача 4. Докажите, что пространства S^3 и $S^2 \times \mathbb{C}P^\infty$ имеют одинаковые гомотопические группы.

Задача 5. Докажите, что $\pi_n(\Omega X) \cong \pi_{n+1}(X)$ для любого X при $n \geq 0$.