

Топология-1, семинар 8, 30.03.2015.

Задача 1. Опишите фундаментальную группу бутылки Клейна K . Докажите, что

$$\pi_1(K) \cong \langle c_1, c_2 \mid c_1^2 c_2^2 \rangle.$$

Опишите абелианизацию группы $\pi_1(K)$ и выведите отсюда, что бутылка Клейна не гомеоморфна проективной плоскости и не гомеоморфна ни одной из поверхностей S_g .

Задача 2. Пусть P_g — проективная плоскость с g ручками, а K_g — бутылка Клейна с g ручками. Докажите, что фундаментальная группа поверхности P_g или K_g изоморфна факторгруппе свободной группы с образующими c_1, \dots, c_k по одному соотношению $c_1^2 \cdot \dots \cdot c_k^2 = 1$, где $k = 2g + 1$ для P_g и $k = 2g + 2$ для K_g . Докажите, что поверхности S_g, P_g, K_g попарно не гомеоморфны.

Задача 3. Вычислите фундаментальные группы пространств $\mathbb{R}P^n$ и $\mathbb{C}P^n$.

Задача 4. Пространство X называется *односвязным*, если $\pi_1(X) = 0$. Докажите, что всякое односвязное клеточное пространство гомотопически эквивалентно клеточному пространству с единственной 0-мерной клеткой и без 1-мерных клеток.

Задача 5. Докажите, что всякая группа является фундаментальной группой некоторого клеточного пространства.