Лекция 5: Когомологии с коэффициентами в пучках.

1. Сейчас мы кратко опишем теорию когомологий, включающую в себя когомологии Дольбо и де Рама, как, впрочем, и все остальные классические теории когомологий.

Пусть X — топологическое пространство, $\tau = \tau(X)$ — семейство всех открытых множеств в X. Теория когомологий сопоставляет каждому пучку абелевых групп $\mathcal{P}$ на X последовательность абелевых групп $H^m(X, \mathcal{P})$, $m \geq 0$, называемых *группами когомологий X с коэффициентами в $\mathcal{P}$.* При этом должны выполняться свойства, которые мы сейчас перечислим.

(K1) Каждый морфизм пучков $f : \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_2$, $f = \{f_U\}_{U \in \tau}$, определяет набор гомоморфизмов $f^m : H^m(X, \mathcal{P}_1) \to H^m(X, \mathcal{P}_2)$. При этом композиции и сумме морфизмов соответствуют композиция и сумма гомоморфизмов. Иначе говоря, когомологии — ковариантный и аддитивный функтор из категории пучков абелевых групп в категорию абелевых групп.

(K2) Для любого пучка $H^0(X, \mathcal{P}) \cong \mathcal{P}(X) =: \Gamma(X, \mathcal{P})$, и для любого морфизма $f^0 = f_X$. Таким образом, функтор нульмерных когомологий естественно изоморфен функтору глобальных сечений.

Определение. *Последовательность морфизмов пучков $\mathcal{A} \xrightarrow{f} \mathcal{B} \xrightarrow{g} \mathcal{C}$ точна в члене $\mathcal{B}$, если $g \circ f = 0$ и любое сечения $s \in \mathcal{B}(U)$, удовлетворяющее условию $g(s) = 0$, локально имеет вид $s|_V = f(\sigma)$ для некоторого $\sigma \in \mathcal{A}(V)$.*

Точность последовательности пучков — чисто локальное свойство. Неверно, что для любого $U \in \tau(X)$ точна последовательность групп сечений.

Пример. Пусть $\mathcal{L}$ — голоморфное расслоение на римановой поверхности. Тогда точны (т.е. точны во всех членах) две тройки пучков (тройки Дольбо):

$$0 \to \mathcal{L} \to \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}} \Lambda^{0,0} \xrightarrow{\overline{\partial}_{\mathcal{L}}} \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}} \Lambda^{0,1} \to 0$$
$$0 \to \mathcal{L} \to \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{F}^{0,0} \xrightarrow{(\overline{\partial}_{\mathcal{F}})_{\mathcal{L}}} \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{F}^{0,1} \to 0$$

Точность этих двух троек в первых двух членах суть определение голоморфности и лемма Вейля. Точность в третьем члене следует из того, что формула $u = \frac{1}{\pi z} * \phi$ дает лежащее в соответствующем классе решение уравнения $\frac{\partial}{\partial \overline{z}} u = \phi$ для гладкой или обобщенной функции ϕ с компактным носителем. Действительно, по формуле Коши–Грина $\frac{1}{\pi z}$ есть решение уравнения $\frac{\partial}{\partial \overline{z}} u = \delta_0$ (т.е. фундаментальное решение для $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$), и остается применить свойства свертки.

(K3) Для точной тройки пучков $0 \to \mathcal{A} \to \mathcal{B} \to \mathcal{C} \to 0$ определен *связывающий гомоморфизм* $\delta = \delta^m : H^m(X, \mathcal{C}) \to H^{m+1}(X, \mathcal{A})$ такой, что имеет место точная когомологическая последовательность (т.к.п.) вида

$$0 \to H^0(X, \mathcal{A}) \to H^0(X, \mathcal{B}) \to H^0(X, \mathcal{C}) \xrightarrow{\delta^0} H^1(X, \mathcal{A}) \to H^1(X, \mathcal{B}) \to H^1(X, \mathcal{C}) \xrightarrow{\delta^1} \ldots$$

Эта последовательность *естественна относительно морфизмов троек пучков.* Это означает, что если две тройки пучков суть две строки в коммутативной диаграмме, то соответствующие точные последовательности также образуют коммутативную диаграмму.

Пример. Для приведенных выше троек Дольбо можно определить морфизм с помощью стандартного вложения $\Lambda^{p,q} \hookrightarrow \mathcal{F}^{p,q}$. Ниже мы увидим, что соответствующее отображение точных когомологических последовательностей является изоморфизмом.

Последнее свойство когомологий мы введем с помощью понятия *вялого* пучка. Пучок $\mathcal{P}$ называется вялым, если для любого $U \subset X$ ограничение ρ_U^X сюръективно. Иначе говоря, любое сечение вялого пучка продолжается до глобального сечения.

Задача. Доказать, что любой пучок можно естественным образом вложить в вялый пучок.

(K4) Для любого вялого пучка $H^m(X, \mathcal{P}) = 0$ при $m > 1$.

2. Один из классических способов построения теории когомологий с коэффициентами в пучках дают так называемые *когомологии Чеха.*

Пусть $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ — открытое покрытие пространства X. Введем стандартное обозначение $U_{\alpha_0\ldots\alpha_k} = U_{\alpha_0}\cap\ldots\cap U_{\alpha_k}$. Для любого пучка абелевых групп $\mathcal{P}$ на X определим группы *(альтернированных) коцепей Чеха покрытия* $\mathfrak{U}$ *с коэффициентами в* $\mathcal{P}$*:*

$$\check{C}^k(\mathfrak{U},\mathcal{P}) = \{(c_{\alpha_0\ldots\alpha_k})\,|\,c_{\alpha_0\ldots\alpha_k}\in\mathcal{P}(U_{\alpha_0\ldots\alpha_k}),\ c_{\alpha_0\ldots\alpha_k} = (-1)^\sigma c_{\alpha_{\sigma(0)}\ldots\alpha_{\sigma(k)}}\},$$

где σ — любая перестановка из S^{k+1}, и $(-1)^\sigma$ — знак, определяемый ее четностью.

Дифференциалом Чеха назовем гомоморфизм $\check{d}^k : \check{C}^k(\mathfrak{U},\mathcal{P})\to\check{C}^{k+1}(\mathfrak{U},\mathcal{P})$, заданный формулой

$$\check{d}^k(c)_{\alpha_0\ldots\alpha_{k+1}} = \sum_{\ell=0}^{k+1}(-1)^\ell c_{\alpha_0\ldots\hat{\ell}\ldots\alpha_{k+1}},$$

где "шапочка" обозначает, что индекс с этим номером пропущен.

Ядро этого оператора назовем *группой коциклов,* а образ — *группой кограниц.* Наконец, *k-ой группой когомологий Чеха покрытия* $\mathfrak{U}$ *с коэффициентами в* $\mathcal{P}$ называется факторгруппа

$$\check{H}^k(\mathfrak{U},\mathcal{P}) = \frac{\operatorname{Ker}\check{d}^k}{\operatorname{Im}\check{d}^{k-1}}.$$

Теперь остается избавиться от зависимости от покрытия. Пусть $\mathfrak{V} = \{V_\beta\}_{\beta\in J}$ другое открытое покрытие пространства X. Будем говорить, что $\mathfrak{V}$ вписано в $\mathfrak{U}$, если задано отображение множеств индексов $\psi : J\to I$ такое, что $V_\beta\subset U_{\psi(\beta)}$. Покрытия эквивалентны, если они вписаны друг в друга.

Для вписанного в $\mathfrak{U}$ покрытия $\mathfrak{V}$ определено очевидное отображение ограничения коцепей $\psi^k : \check{C}^k(\mathfrak{U},\mathcal{P})\to\check{C}^k(\mathfrak{V},\mathcal{P})$, $\psi^k(c)_{\beta_0\ldots\beta_k} = c_{\psi(\beta_0)\ldots\psi(\beta_k)}|_{V_{\beta_0\ldots\beta_k}}$. Это отображение коммутирует с дифференциалом Чеха и потому индуцирует отображения групп когомологий

$$\psi^k : \check{H}^k(\mathfrak{U},\mathcal{P})\to\check{H}^k(\mathfrak{V},\mathcal{P}).$$

На самом деле, полученное ограничение когомологий на вписанное покрытие не зависит от выбора отображения ψ.

Задача. Если ϕ — другое такое отображение, то для любого коцикла $c\in\check{C}^k(\mathfrak{U},\mathcal{P})$ коцепь $b_{\alpha_0\ldots\alpha_{k-1}} := \sum\limits_{\ell=0}^{k-1}(-1)^\ell c_{\phi(\alpha_0)\ldots\phi(\alpha_\ell)\psi(\alpha_\ell)\ldots\psi(\alpha_{k-1})}$ удовлетворяет соотношению $\psi^k c - \phi^k c = \check{d}^{k-1}b$.

Таким образом, два ограничения коцикла различаются на кограницу, что и утверждалось.

Определение. *Группами когомологий Чеха пространства X с коэффициентами в $\mathcal{P}$ назовем*

$$\check{H}^*(X,\mathcal{P}) = \varinjlim\check{H}^*(\mathfrak{U},\mathcal{P}),$$

где прямой предел берется по классам эквивалентных покрытий.

Теорема. *Для хаусдорфова паракомпактного пространства $\check{H}^*(X,\mathcal{P})\cong H^*(X,\mathcal{P})$, т.е. когомологии Чеха удовлетворяют условиям* (К1) – (К4).

Мы рассмотрим только конструкцию связывающего гомоморфизма в когомологиях Чеха.

Задача. Пусть $\{U_\alpha\}$ — локально конечное покрытие хаусдорфова паракомпактного пространства X, тогда у каждой точки $x\in X$ найдется такая "маленькая окрестность" $W(x)$, что если $W(x)\cap W(y)\neq\emptyset$ и $y\in U_\alpha$, то $W(x)\subset U_\alpha$.

Пусть теперь дана точная тройка пучков $0\to\mathcal{A}\xrightarrow{g}\mathcal{B}\xrightarrow{f}\mathcal{C}\to 0$ на X, и пусть $c\in\check{H}^k(X,\mathcal{C})$. Существует представитель этого класса $c = (c_{\alpha_0\ldots\alpha_k})\in\check{C}^k(\mathfrak{U},\mathcal{C})$, где $\mathfrak{U}$ — локально конечное покрытие. По определению точности мы можем выбрать маленькие окрестности $W(x)$ так, что если $x\in U_{\alpha_0\ldots\alpha_k}$, то $c_{\alpha_0\ldots\alpha_k}|_{W(x)}\in\operatorname{Im}f_{W(x)}$.

Таким образом, на покрытии $\{W(x)\}_{x\in X}$ класс c представляется коциклом вида $f(b)$, где b — коцепь с коэффициентами в $\mathcal{B}$. Заметим теперь, что $f(\check{d}^k b) = \check{d}^k f(b) = 0$, и снова в силу точности $\check{d}^k b = g(a)$, где a — коцикл (почему?) с коэффициентами в $\mathcal{A}$.

Положим теперь $\delta^k(c) := a + \operatorname{Im}\check{d}^k \in H^{k+1}(X, \mathcal{A})$.

Задача. Проверить, что этот гомоморфизм обладает нужными свойствами.

3. Вернемся теперь к римановой поверхности S. Отметим сначала одно полезное свойство когомологий C^∞-модулей.

Лемма. *Если $\mathcal{P}$ — C^∞-модуль на гладком многообразии X, то $H^m(X, \mathcal{P}) = 0$ при $m > 0$.*

Пусть $\{\chi_\alpha\}$ — разбиение единицы, подчиненное покрытию $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}$. Положим для любой m-коцепи $(kc)_{\alpha_0\ldots\alpha_{m-1}} := \sum\limits_\alpha \chi_\alpha c_{\alpha\alpha_0\ldots\alpha_{m-1}}$. Легко проверить, что тогда для коцикла c справедливо $c = \check{d}^{m-1}kc$, что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь точную когомологическую последовательность первой тройки Дольбо голоморфного векторного расслоения. В силу предыдущей леммы она имеет вид

$$0 \to \mathcal{L}(S) \to \mathcal{L}\otimes_{\mathcal{O}} \Lambda^{0,0}(S) \xrightarrow{\overline{\partial}_{\mathcal{L}}} \mathcal{L}\otimes_{\mathcal{O}} \Lambda^{0,1}(S) \to H^1(S, \mathcal{L}) \to 0 \to 0 \to H^2(S, \mathcal{L}) \to 0 \to \ldots$$

Таким образом, $H^1(S, \mathcal{L}) \cong \frac{\mathcal{L}\otimes_{\mathcal{O}}\Lambda^{0,1}(S)}{\operatorname{Im}\overline{\partial}_{\mathcal{L}}}$, и $H^m(S, \mathcal{L}) = 0$ при $m > 1$. Получается следующая

Теорема (Дольбо). *Для голоморфного векторного расслоения $\mathcal{L}$ на римановой поверхности*

$$H^m(S, \mathcal{L}) \cong H^{0,m}(S, \mathcal{L}).$$

Заметим, что то же самое рассуждение применимо и ко второй тройке Дольбо для $\mathcal{L}$. Следовательно, когомологии Дольбо можно вычислять и с помощью обобщенных форм, т.е.

$$H^{p,q}(S, \mathcal{L}) = \frac{\operatorname{Ker}(\overline{\partial}^{p,q}_{\mathcal{F}})_{\mathcal{L}}}{\operatorname{Im}(\overline{\partial}^{p,q-1}_{\mathcal{F}})_{\mathcal{L}}}.$$

Задача. Доказать *абстрактную теорему де Рама*, утверждающую, что если дана точная последовательность пучков $0 \to \mathcal{P} \to \mathcal{A}^0 \to \mathcal{A}^1 \to \ldots$, в которой $H^m(\mathcal{A}^k) = 0$ при всех $k \geq 0$ и $m > 0$, то когомологии $H^*(\mathcal{P})$ изоморфны когомологиям комплекса $\Gamma(\mathcal{A}^0) \to \Gamma(\mathcal{A}^1) \to \ldots$ (Указание: разбить эту последовательность на точные тройки.)

Введем еще одно полезное обобщение классического понятия.

Определение. *Пусть $\mathcal{P}$ — пучок векторных пространств, причем его когомологии $H^m(X, \mathcal{P})$ конечномерны и равны нулю при $m > N$. Тогда эйлеровой характеристикой пучка $\mathcal{P}$ (или пространства X с коэффициентами в $\mathcal{P}$) называют число*

$$\chi(X, \mathcal{P}) = \sum_{m\geq 0} (-1)^m \dim H^m(X, \mathcal{P}).$$

Лемма. *Пусть дана точная тройка пучков векторных пространств $0 \to \mathcal{A} \to \mathcal{B} \to \mathcal{C} \to 0$. Если какие-нибудь два пучка в этой тройке удовлетворяют условиям предыдущего определения, то и третий им удовлетворяет и справедлива формула*

$$\chi(\mathcal{A}) - \chi(\mathcal{B}) + \chi(\mathcal{C}) = 0$$

Для доказательства рассмотрим т.к.п. для этой тройки пучков и применим линейную алгебру: если $0 \to V^0 \to \ldots \to V^n \to 0$ — точная последовательность векторных пространств, то $\sum (-1)^j \dim V^j = 0$.

Пример. Эйлерова характеристика голоморфного расслоения $\mathcal{L}$ на римановой поверхности равна $\chi(S, \mathcal{L}) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(S) - \dim_{\mathbb{C}} H^1(S, \mathcal{L})$. Из теоремы Дольбо и двойственности Серра следует в частности, что $\chi(S, \mathcal{L}) = -\chi(S, \mathcal{L}^* \otimes_{\mathcal{O}} \Omega^1)$.