Отчет луареата конкурса «Молодая математика России» за 2016 г.

А. В. Фонарёв

Производные категории (здесь и далее мы будем рассматривать ограниченные производные категории) когерентных пучков являются важнейшими инвариантами алгебраических многообразий. Как водится, интересные объекты бывают одновременно очень сложно устроены. В каком-то смысле наиболее просто устроены производные категории, допускающие полный исключительный набор.

Напомним, что объект E в k-линейной триангулированной категории $\mathcal{T}$ называется исключительным, если $\mathrm{Hom}^\bullet(E, E) = k$. С каждым исключительным объектом можно связать подкатегорию $\langle E \rangle$, им порожденную. Оказывается, что такая категория очень просто устроена: она эквивалентна производной категории векторных пространств над полем k, которая в свою очередь есть просто категория градуированных конечномерных векторных пространств. Полный исключительный набор является аналогом базиса в триангулированной категории. А именно, это набор исключительных объектов $E_1, E_2, \ldots, E_n$ с условием $\mathrm{Hom}^\bullet(E_i, E_j) = 0$ при $i > j$, порождающий всю категорию.

Давняя гипотеза гласит, что производная категория когерентных пучков на рациональном однородном пространстве допускает полный исключительный набор, состоящий из эквивариантных векторных расслоений. Данная гипотеза доказана лишь в ограниченном числе случаев: Бейлинсоном для проективных пространств, Капрановым для групп GL_n и квадрик, а также разными людьми для некоторых многообразий малой размерности.

В отчетном году наши исследования были сосредоточены на несколько экзотическом, но схожем объекте: изотропном грассманиане 3-мерных подпространств в фиксированном векторном пространстве размерности 7, наделенном кососимметрической формой максимального ранга. Выбор многообразия обусловлен двумя аргументами. Данное многообразие — простейший нетривиальный пример так называемого нечетного симплектического грассманиана (симплектический грассман $\mathrm{IGr}(2, 5)$ является гиперплоским сечением грассманиана $\mathrm{Gr}(2, 5)$). Нечетные симплектические грассманианы являются почти однородными пространствами почти редуктивной нечетной группы Sp_{2n+1}. Мы ожидаем, что их производные категории обладают полными исключительными наборами. В случае $\mathrm{IGr}(3, 7)$ подобный набор должен состоять из 20 исключительных объектов. Пока что нам удалось построить 16 из них, а также существенно продвинуться в понимании теории представлений нередуктивных симплектических групп. В ближайшем будущем планируется завершить начатое и применить полученное знание к изучению четрырехмерных многообразий Кюхле, а также к построению полных исключительных наборов в производных категориях изотропных грассманианов.

Кроме того, в этом году была закончена совместная работа с А. Кузнецовым, начатая в прошлом году при поддержке Д. Зимина и ныне почившего фонда «Династия». В начале отчета мы говорили о наиболее приятном классе производных категорий алгебраических многообразий: классе категорий, допускающих полный исключительный набор. На противоположном конце спектра находятся т.н. неразложимые категории (категории, не допускающие нетривиальных полуортогональных разложений). Простейшим примером неразложимой категории является производная категория гладкой проективной кривой положительного рода.

Гипотеза А. Бондала гласит, что производную категорию гладкого проективного многообразия всегда можно вложить в производную категорию подходящего гладкого многообразия Фано. С. Галкин предположил, что производную категорию кривой рода больше единицы можно вложить в производную категорию стабильных расслоений ранга 2 с фиксированным детерминантом нечетной степени, причем в качестве функтора вложения можно выбрать функтор Фурье–Мукаи, заданный универсальным расслоением на произведении. Нам удалось доказать гипотезу Галкина для общей кривой, то есть показать существование непустого открытого подмножества в многообразии модулей кривых, для которого утвержение выполнено.

Papers

[1] *Derived categories of curves as components of Fano manifolds*, joint with A. Kuznetsov, `https://arxiv.org/abs/1612.02241`.

Scientific conferences and seminar talks

[1] *Derived categories of homogeneous varieties I*, “Categorical and Analytic Invariants in Algebraic Geometry III”, Moscow, Russia, September 14, 2016.

[2] *Derived categories of homogeneous varieties II*, “Categorical and Analytic Invariants in Algebraic Geometry IV”, IPMU, Japan, November 18, 2016.