

Отчёт по гранту «Молодая математика России» за 2018 год

Курносков Н.М.

1 Результаты полученные в этом году

Было продолжено изучение гиперкэлеровых многообразий, те римановых многообразий, снабжённых тройкой комплексных структур I, J, K , удовлетворяющих кватернионным соотношениям и согласованных с метрикой, которая является кэлеровой по отношению к I, J, K . Важным объектом изучения любых многообразий являются их автоморфизмы.

Совместно с Е. Ясинским мы изучали свойства групп автоморфизмов проективных гиперкэлеровых многообразий. Как ранее доказал Огизо – группы биголоморфных и бимероморфных автоморфизмов непроективных гиперкэлеровых многообразий конечно-порождены (являются, более того, почти абелевыми ранга $\max(\rho(M) - 1, 1)$, где $\rho(M)$ – число Пикара). Для проективных гиперкэлеровых многообразий Огизо доказал аналог альтернативы Титса, а именно, что либо группа почти абелева конечного ранга, либо содержит свободную некоммутативную группу. Несколько позже Буассье и Сарти, используя теорему Торелли, доказанную Вербицким, показали, что группа бимероморфных (бirationальных в проективном случае) автоморфизмов $Bir(M)$ конечно порождена. Из этого не следует конечно-порождённость группы биголоморфных автоморфизмов, поскольку последняя не является подгруппой конечного индекса. В работе с Е. Ясинским мы смогли доказать аналогичный результат для $Aut(M)$ факт, а также разные свойства для них, в том числе усиление альтернативы Титса, используя CAT(0)-пространства. В нашей работе мы использовали результат Америк-Вербицкого, а именно существование фундаментального полиэдрального домена при действии $Aut(M)$ на обильный конус $Amp(M)$ (и аналогичный результат Маркмана для $Mov(M)$ в случае группы $Bir(M)$).

Используя результат Хойбрехтса, что решётка Нерон-Севери проективного гиперкэлерового многообразия гиперболична с сигнатурой $(1, \rho(M) - 1)$, мы связали с этим пространством одну из гиперболических моделей, в частности можем используя проекцию из центра перевести гиперболоид в шар Пуанкаре, который сам по себе является CAT(0)-пространством. Выкидывая возможно бесконечное число регионов с орокасками (те наборов непересекающихся орошаров), мы можем добиться, чтобы на оставшейся части шара Пуанкаре наша группа автоморфизмов действовала непрерывно разрывно, и при необходимости уменьшая радиус шаров ещё, мы можем показать что действие будет кокомпактно. Далее основной результат следует из работ Бридсона и Хэфлигера. Следуя нашей конструкции мы имеем выпуклое в гиперболической метрике подпространство полного метрического пространства, те вновь CAT(0)-пространство, причём действие остаётся непрерывно разрывным и кокомпактным. Из этого следуют все свойства конечности – конечно порождённость, конечное число классов сопряжённости конечных групп, а также усиленная альтернатива Титса.

В итоге мы имеем следующую теорему

Теорема 1: Рассмотрим группы биголоморфных и бимероморфных автоморфиз-

мов проективных гиперкэлеровых многообразий. Тогда

- (1) Они конечно представлены.
- (2) Число классов сопряжённости конечных групп конечно.
- (3) Если $G \subseteq \text{Bir}(M)$ для проективного гиперкэлерового M , то она либо содержит свободную некоммутативную группу, либо подгруппу \mathbb{Z}^n конечного индекса.

Также совместно с А. Кузнецовой, Е. Ясинским, а также Ф. Богомоловым мы рассматриваем аналогичные вопросы для некэлеровых голоморфно-симплектических многообразий – единственным односвязным примером которых являются многообразия Богомолова-Гуана.

База лагранжевого расслоения для гиперкэлерового форфолда

Продолжая ранее начатые исследования по конечности гиперкэлеровых многообразий (известно две бесконечных серии и два конечных примера для односвязных гиперкэлеровых многообразий) совместно с Ф. Богомоловым мы показали, что база лагранжевого расслоения проективного гиперкэлерового четырёхмерного многообразия всегда CP^2 . Этот результат позволяет существенно продвинуться в доказательстве гипотезы Бовилля, в частности известно, что для $b_2 \geq 7$ существует конечное число гиперкэлеровых многообразий, имеющих лагранжево расслоение с гладкой базой. Таким образом, по модулю SYZ гипотезы мы имеем конечность гиперкэлеровых многообразий с $b_2 \geq 7$. Более того, предполагается, что достаточно исследовать возможные вырождения таких расслоений, что позволяет редуцировать задачу к комбинаторной.

2 Опубликованные и поданные в печать работы

1. Kurnosov N., Yasinsky E., Automorphisms of hyperkahler manifolds and groups acting on $CAT(0)$ spaces, arXiv:1810.09730v1, submitted to IMRN.
2. Bogomolov F., Kurnosov N., Lagrangian fibrations of IHS fourfolds, arXiv:1810.11011v1, submitted to EJM.

3 Участие в конференциях и школах

3.1 Доклады на конференциях, семинарах и в научных центрах

1. Talk "*Cohomology of hyperkähler manifolds*", International University of Florida, 02 February.
2. Talk "*Kuga-Satake construction and cohomology of hyperkahler manifolds*", UPenn, 17 April.
3. Talk "*Kuga-Satake construction and cohomology of hyperkahler manifolds*", Uof Kansas, 19 April.
4. Talk "*Cohomology of hyperkähler manifolds*", Calabi-Yau workshop, Krakow, 17-21 May.
5. Talk "*Гиперкэлеровы многообразия*", Конференция, посвящённая десятилетию матфака.
6. Talk "*Automorphisms of hyperkaähler manifolds*", IMPA, 13 August.
7. Talk "*BTT Theorem for holomorphic symplectic manifolds*", UGA, 13 September.
8. Talk "*Automorphisms of hyperkaähler manifolds and $CAT(0)$ -spaces*", Courant Institute, 9 October.

9. Talk "*Hyperkähler manifolds*", Toronto, 11 October.
10. Talk "*Cohomology of hyperkähler manifolds*", Northwestern, 17 October.
11. Talk "*Automorphisms of hyperkaähler manifolds and CAT(0)-spaces*", UGA, 14 November.

3.2 Как организатор

1. Lutsinofest, July 1-3, 2018.
2. Summer School "Algebra and Geometry" in Yaroslav', July 25-31, 2017.

4 Педагогическая деятельность

Прочитан курс лекций в летней школе "Современная математика" по теме "Подсчёт числа точек на кривой".

5 Краткие итоги за три года

Удалось получить важные продвижения по направлению к гипотезе Бовиля, одной из основных целей проекта:

(1) Неравенство для чисел Бетти шестимерных гиперкэлеровых многообразий (**2016 год**)

$$97 + \frac{37}{2}b_3 - \frac{19}{2}b_4 - \frac{b_5}{2} + \frac{23}{2}h^{2,2} \leq \frac{38b_2^2 - 1030b_2 + 7572}{b_2 + 1}. \quad (1)$$

(2) Гладкость базы лагранжевых расслоений проективных гиперкэлеровых четырёхмерных многообразий (**2018**)

Совместно с А. Солдатенковым и М. Вербицким построено обобщение конструкции Куга-Сатаке для гиперкэлеровых многообразий (**2017**), что уже находит приложения в теории Ходжа и смежных областях. Нами предполагалось, что с помощью этой конструкции можно будет показать невырожденность обобщённой формы Бовиля-Богомолова-Фуджики, но это оказалось сложной на данный момент задачей. Построение этой формы для некэлеровых голоморфно-симплектических многообразий будет опубликовано в **2019** совместно с М. Вербицким.

Расширяя знания о проективных многообразиях совместно с Е. Ясинским удалось показать различные результаты конечности их групп автоморфизмов (**2018**).

Таким образом, за три года было опубликовано 2 статьи и два препринта по основной теме заявки, а также одна статья по смежной теме (комплексная геометрия). Удалось продвинуться в гипотезе Бовиля, а также изучении когомологий гиперкэлеровых многообразий (ограничения чисел Бетти, конструкция Куга-Сатаке).

Опубликованы следующие статьи и препринты:

1. Kurnosov N., *Constraints on Betti numbers of hyperkähler sixfolds with $b_2 = 23$* , Proceedings of MiniPAGES, Warsaw, 2016.
2. Kurnosov N., Soldatenkov A., Verbitsky M., *Kuga-Satake construction and cohomology of hyperkahler manifolds*, Preprint arXiv:1703.07477v1 [math.AG]. *Accepted to Adv. in Math.*

3. Buonerba F., Bogomolov F., Kurnosov N., *Classifying VII_0 surfaces with $b_2 = 0$ via arithmetic groups*, arXiv preprint arXiv:1709.00062v1 [math.AG] *Submitted to Eur. J. Math.*
4. Kurnosov N., Yasinsky E., Automorphisms of hyperkahler manifolds and groups acting on CAT(0) spaces, arXiv:1810.09730v1, submitted to IMRN.
5. Bogomolov F., Kurnosov N., Lagrangian fibrations of IHS fourfolds, arXiv:1810.11011v1, submitted to EJM.