Отчёт Прасолова М. В. за 2018 год по гранту конкурса «Молодая математика России»

1 Результаты, полученные в этом году

В этом году мы завершили работу над препринтом статьи [1], новая версия выложена на arXiv.org и статья отправлена в журнал Journal of Topology на рассмотрение. Добавлено и переработано несколько технических определений и лемм — всего объём увеличился на 10 страниц. По сравнению с прошлыми отчётами новых результатов нет, кратко переизложим их.

Стандартной контактной структурой в $\mathbb{R}^3$ называется распределение плоскостей $\ker dz + xdy$. Такие плоскости называются контактными. Регулярно вложенный узел называется лежандровым, если его вектор скорости остаётся касательным к контактной плоскости при всех значениях параметра. Два таких вложения задают один и тот же лежандров узел, если они соединены гомотопией в пространстве таких вложений.

Основной результат может быть сформулирован следующим образом: два лежандровых узла на рисунке различны.

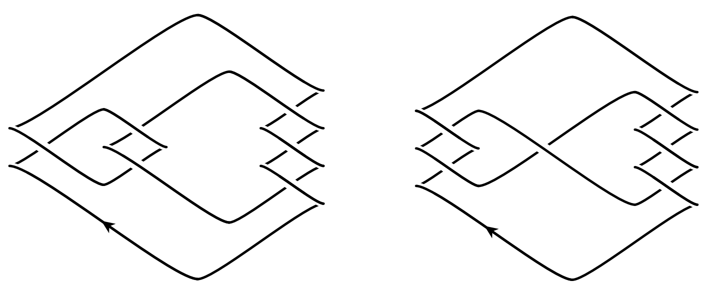


Рис. 1: Фронтальные проекции двух различных лежандровых представителей узла 6_2

Чтобы восстановить узел по рисунку, нужно завести в плоскости рисунка координаты (y, z), а x-координата восстанавливается из условия касания контактной плоскости: $x = -\dot{z}/\dot{y}$.

Отметим, что область применения нашего метода различения лежандровых узлов не ограничивается приведённой парой, а позволяет различать все пары лежандровых узлов, для которых были выдвинуты гипотезы до нашей работы. Приведённый пример — это самая простая пара узлов, для которой вопрос оставался открытым.

Мы продолжаем геометрический подход, основанный на выпуклых поверхностях по Жиру, применявшийся для различения лежандровых узлов в работах Якова Элиашберга, John Etnyre и Ko Honda для частных топологических классов узлов (тривиальный узел, восьмёрка, торические узлы). Мы рассматриваем поверхности, выпуклые по Жиру относительно сразу двух контактных структур, стандартной и её зеркального образа. Наш метод основан на комбинаторном описании выпуклых поверхностей по Жиру в терминах прямоугольных диаграмм.

2 Публикации

[1] I. Dynnikov, M. Prasolov. Rectangular diagrams of surfaces: distinguishing Legendrian knots, arXiv:1712.06366. Подано в журнал Journal of Topology.

3 Доклады

- Knots in Washington XLVI: 70th Birthday of Oleg Viro, Вашингтон, округ Колумбия, США, 4-6 мая 2018, приглашённый доклад «Basic moves of rectangular diagrams of surfaces».
- Knots in Washington XLVI: 70th Birthday of Oleg Viro, Вашингтон, округ Колумбия, США, 4-6 мая 2018, приглашённый доклад «Exchange classes of rectangular diagrams, Legendrian knots, and the knot symmetry group».

4 Научные семинары

Участник семинаров на механико-математическом факультете:

- Семинар «Теория узлов и маломерная топология»;
- Семинар имени М.М.Постникова «Алгебраическая топология и ее приложения»;
- Семинар «Геометрия, топология и математическая физика».

5 Педагогическая деятельность

Обязательные семинары и спецкурсы на механико-математическом факультете МГУ им. Ломоносова:

5.1 Весенний семестр

Семинары по линейной алгебре и геометрии, 1 курс.

5.2 Осенний семестр

- Семинары по аналитической геометрии, 1 курс;
- Спецкурс по симплектической геометрии и топологии. Программа первого полугодия:

– Классические конструкции: геометрия симплектического векторного пространства, фундаментальная группа симплектической группы и индекс Маслова, лагранжев грассманиан, гамильтонов формализм, задание симплектоморфизмов производящими функциями.
– Категория Люстерника-Шнирельмана и критические точки функций.
– Теорема Конли-Цендера о числе неподвижных точек такого диффеоморфизма двумерного тора, который сохраняет площадь и центр масс.
– Обобщение теории Штурма, сделанное В.И. Арнольдом.

6 Итоги трёх лет

В целом результат соответствует заявке. Напомним, что перед началом исследований по данному гранту мы исходили из следующих предпосылок.

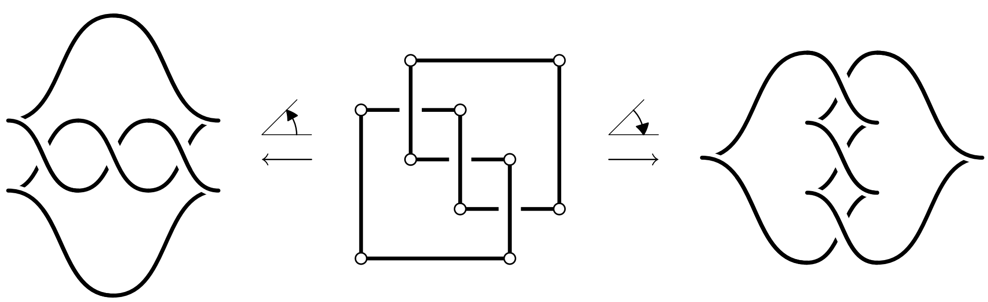
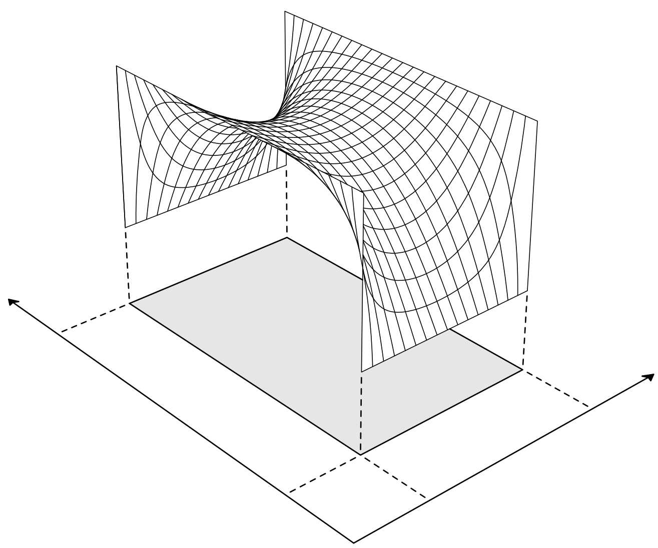


Рис. 2: Два лежандровых узла, построенных по прямоугольной диаграмме

Прямоугольной диаграммой узла называется плоская диаграмма узла, образованная вертикальными и горизонтальными отрезками, причём в перекрёстках вертикальный отрезок всегда выше горизонтального. Повернём прямоугольную диаграмму на $\pi/4$ против часовой стрелки, углы, торчащие вверх и вниз, сгладим, а остальные — превратим в клювы. Мы получим проекцию лежандрова узла на плоскость yz. Сам лежандров узел определён однозначно по правилу, которое мы описали выше для узла 6_2. Из прямоугольной диаграммы можно получить ещё один лежандров узел, повернув диаграмму на $\pi/4$ по часовой стрелке, аналогично некоторые углы сгладив, а другие сделав клювами, и обратив все перекрёстки, как на рисунке. Таким образом прямоугольная диаграмма определяет два лежандровых узла, причём их топологические типы получаются друг из друга зеркальной симметрией. Верна теорема, что для любых двух лежандровых узлов из зеркальных топологических типов найдётся прямоугольная диаграмма, их представляющая.

Как утверждалось в заявке, мы построили комбинаторный объект — прямоугольную диаграмму поверхности, — который определяет два класса выпуклых поверхностей по Жиру — относительной стандартной контактной структуры и её зеркального образа.



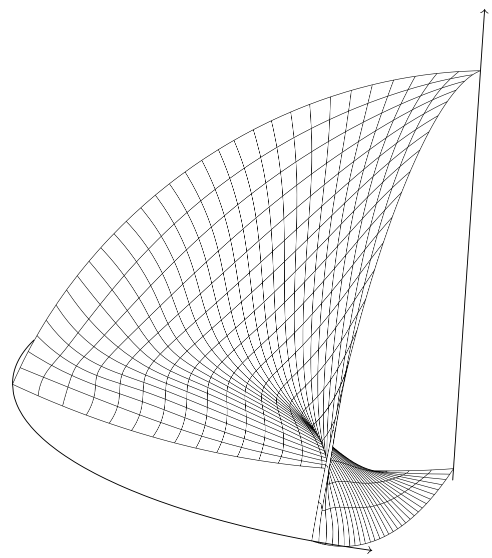


Рис. 3: Слева: криволинейный прямоугольник в координатах джойна и его проекция на двумерный тор угловых координат, справа: изображение того же прямоугольника в трёхмерной сфере

Поверхность мы склеиваем из криволинейных прямоугольников в трёхмерной сфере. В координатах сферы, как джойна двух окружностей, любой такой криволинейный прямоугольник однозначно проецируется на обычный прямоугольник на двумерном торе угловых координат (см. рисунок). Объединение таких прямоугольников на двумерном торе называется прямоугольной диаграммой поверхности.

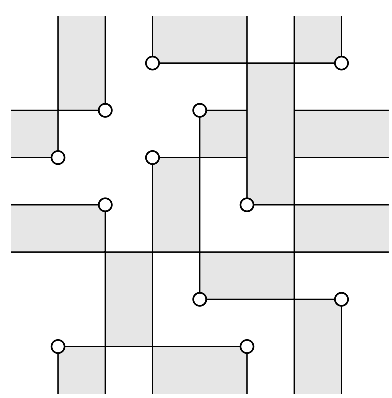


Рис. 4: Прямоугольная диаграмма поверхности рода 1, край которой заузлен узлом «восьмёрка»

Одним из наших центральных результатов является теорема 2.2 из [1] о реализуемости двух классов выпуклых поверхностей — одного относительно стандартной контактной структуры и другого относительно зеркальной — одной прямоугольной диаграммой поверхности. Это аналог теоремы об узлах, который мы упомянули в предпосылках выше.

В [1] мы построили набор элементарных движений прямоугольных диаграмм поверхностей, но доказательство достаточности этих движений, чтобы переходить от одной диаграммы к любой другой из того же класса изотопии, мы оставили на ближайшее будущее за отсутствием на текущий момент приложений.

Также в заявке упоминался вопрос о существовании кольца, вложенного в пространство, которое касается контактной структуры вдоль своей границы, но лежандровы узлы, представленные компонентами границы, различны. В работе И.А. Дынникова и В.А. Шастина «Distinguishing Legendrian knots with trivial orientation-preserving symmetry group» дан положительный ответ на этот вопрос. Доказательство основано на результатах работы [1].