Отчёт по гранту
«Молодая математика России»
за 2019 год
Елена Бунькова

1. Результаты, полученные за все годы проекта

1.1. **Теория сигма-функций.** **Приложения к уравнениям математической физики.**

Эллиптической функцией [1] называется мероморфная функция $f(z)$ на $\mathbb{C}$, имеющая решётку периодов Γ, то есть удовлетворяющая условию $f(z+\omega) = f(z)$ для любого $\omega \in \Gamma$. Тор $\mathbb{C}/\Gamma$ является якобианом эллиптической кривой $y^2 = x^3 + \lambda_4 x + \lambda_6$, и таким образом параметры (λ_4, λ_6) эллиптической кривой параметризуют решётки Γ. Любую эллиптическую функцию можно представить как рациональную функцию от функции Вейерштрасса $\wp(z; \lambda_4, \lambda_6)$ с теми же периодами, и её производной по z.

Сигма-функцию Вейерштрасса для эллиптической кривой

$$\mathcal{V}_\lambda = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 | y^2 = x^3 + \lambda_4 x + \lambda_6\}$$

можно определить как решение системы $Q_0 \sigma(z, \lambda_4, \lambda_6) = 0$, $Q_2 \sigma(z, \lambda_4, \lambda_6) = 0$ с начальными условиями $\sigma(0, \lambda_4, \lambda_6) = 0$, $\left(\frac{\partial}{\partial z}\sigma(z, \lambda_4, \lambda_6)\right)\Big|_{z=0} = 1$ для операторов

$$Q_0 = 4\lambda_4 \frac{\partial}{\partial \lambda_4} + 6\lambda_6 \frac{\partial}{\partial \lambda_6} - z\frac{\partial}{\partial z} + 1, \quad Q_2 = 6\lambda_6 \frac{\partial}{\partial \lambda_4} - \frac{4}{3}\lambda_4^2 \frac{\partial}{\partial \lambda_6} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{6}\lambda_4 z_1^2.$$

Функции Вейерштрасса $\zeta(z; \lambda_4, \lambda_6)$ и $\wp(z; \lambda_4, \lambda_6)$ определяются соотношениями $(\ln \sigma(z))' = \zeta(z)$, $\zeta'(z) = -\wp(z)$.

В работах В. М. Бухштабера, В. З. Энольского и Д. В. Лейкина [2] и [3] была построена теория гиперэллиптических сигма-функций. Важнейшее свойство сигма-функций, отличающее их от тэта-функций [4], заключается в том, что они являются целыми функциями от $z = (z_1, \dots, z_g)$, у которых коэффициенты при мономах в разложении в ряд по z представляют собой полиномы от параметров соответствующих семейств алгебраических кривых.

В работе “Алгебры Ли операторов теплопроводности в неголономном репере” построены алгебры Ли систем из $2g$ градуированных операторов теплопроводности $Q_0, Q_2, ..., Q_{4g-2}$, определяющих сигма-функции $\sigma(z, \lambda)$ гиперэллитических кривых рода $g = 1, 2$ и 3. Ключевым при построении операторов $\{Q_{2k}\}$ при $g \geqslant 4$ является результат о том, что структурные константы алгебры Ли этих операторов совпадают с таковыми для алгебры Ли соответствующих векторных полей в пространстве $\mathbb{C}^{2g} \ni \lambda = (\lambda_4, \lambda_6, \dots, \lambda_{4g+2})$ параметров кривых. Эти векторные поля, касающиеся дискриминанта, известны явно для любого рода g. В качестве следствия этого результата получено, что системы из трёх операторов Q_0, Q_2 и Q_4 уже достаточно, чтобы определить сигма-функции.

Важность этого результата состоит в том, что взяв за определения полученные формулы для системы операторов $\{Q_{2k}\}$, всю теорию гиперэллиптических функций можно строить на этой основе, в частности это позволит эффективно вычислять коэффициенты разложения в ряд гиперэллиптических функций, см. [5].

Задача дифференцирования абелевых функций по параметрам поставлена в [5]. Она является обобщением на многомерный случай классического результата Ф. Г. Фробениуса и Л. Штикельбергера [6], построивших образующие алгебры Ли дифференцирований эллиптических функций:

$$\mathcal{L}_0 = 4\lambda_4\partial_{\lambda_4} + 6\lambda_6\partial_{\lambda_6} - z\partial_z, \qquad \mathcal{L}_1 = \partial_z, \qquad \mathcal{L}_2 = 6\lambda_6\partial_{\lambda_4} - \frac{4}{3}\lambda_4^2\partial_{\lambda_6} - \zeta(z;\lambda_4,\lambda_6)\partial_z,$$

где $\zeta(z;\lambda_4,\lambda_6)$ — ζ-функция Вейерштрасса.

Для рода $g \geqslant 1$ мы рассматриваем задачу дифференцирования гиперэллиптических функций, заданных на якобианах гиперэллиптических кривых рода g в модели

$$\mathcal{V}_\lambda = \{(X,Y) \in \mathbb{C}^2 \colon Y^2 = X^{2g+1} + \lambda_4 X^{2g-1} + \lambda_6 X^{2g-2} + \ldots + \lambda_{4g}X + \lambda_{4g+2}\}.$$

Задача состоит в построении $3g$ образующих алгебры Ли дифференцирований таких функций. В работе [7] эта задача решена для рода $g = 2$, в работе “Differentiation of genus 3 hyperelliptic functions” эта задача решена для рода $g = 3$. В работе “Алгебры Ли операторов теплопроводности в неголономном репере” развит подход, благодаря которому эту задачу удалось решить в роде $g = 4$, а также получить результаты, применимые для всех родов g.

В работе “Алгебры Ли операторов теплопроводности в неголономном репере” также решена более общая задача: для любого решения $\varphi(z,\lambda)$ системы уравнений теплопроводности мы вводим градуированное кольцо $\mathcal{R}_\varphi$, порождённое логарифмическими производными от функции $\varphi(z,\lambda)$ порядка не менее 2 и в явном виде предъявляем алгебру Ли дифференцирований кольца $\mathcal{R}_\varphi$ при $g = 1, 2, 3$. В случае, когда $\varphi(z,\lambda) = \sigma(z,\lambda)$, этот результат даёт алгебры Ли дифференцирований гиперэллитических функций рода $g = 1, 2, 3$.

В плане работ была поставлена задача построить полиномиальную алгебру Ли векторных полей на пространстве $\mathbb{C}^{3g}$, такую что векторные поля спускаются на пространство параметров невырожденных эллиптических кривых и задают базис в каждой точке этого пространства. В работе “Differentiation of genus 3 hyperelliptic functions” подробно объяснена связь этой задачи с задачей дифференцирования гиперэллиптических функций. Таким образом, эта задача также полностью решена в случаях $g = 3$ и $g = 4$ и разработан подход для общего g. В работе “On the problem of differentiation of hyperelliptic functions” явно построены g векторных полей нечётной градуировки и показана их связь с иерархией Кортевега–де Фриза.

Таким образом, проект исследований по теме “Теория сигма-функций. Приложения к уравнениям математической физики” выполнен.

Результаты опубликованы в работах:

- Elena Yu. Bunkova,
  “Differentiation of genus 3 hyperelliptic functions”,
  European Journal of Mathematics, 4:1 (2018), 93–112, arXiv: 1703.03947.
- Elena Yu. Bunkova,
  “On the problem of differentiation of hyperelliptic functions”,
  European Journal of Mathematics, 5:3 (2019), 712–719, arXiv: 1812.04245
- В. М. Бухштабер, Е. Ю. Бунькова,
  “Алгебры Ли операторов теплопроводности в неголономном репере”,
  arXiv:1911.08266.

1.2. **Формальные группы и роды Хирцебруха.**

Род Хирцебруха является одним из важнейших классов инвариантов многообразий. Ряд $f(z) = z + \sum_{k=1}^{\infty} f_k z^{k+1}$, где коэффициенты f_k лежат в кольце R, определяет род Хирцебруха стабильно комплексных многообразий [8, раздел E.3]. Условие, что комплексный род послойно мультипликативен относительно $\mathbb{C}P^{n-1}$ задаётся функциональным уравнением Хирцебруха на функцию $f(z)$ (см. [9, глава 4], [8, глава 9]):

$$\sum_{i=1}^{n} \prod_{j \neq i} \frac{1}{f(z_j - z_i)} = c.$$

Здесь c – константа. Решение $f(z)$ ищут в классе формальных рядов с начальными условиями $f(0) = 0, f'(0) = 1$.

В работе "Функциональное уравнение Хирцебруха: классификация решений" найдены все решения этого уравнения для $n \leqslant 6$ в классе мероморфных функций и в классе рядов. Ранее, подобные результаты были известны лишь для $n \leqslant 4$. Это даёт полную классификацию комплексных родов, послойно мультипликативных относительно $\mathbb{C}P^{n-1}$ для $n \leqslant 6$. Топологическим приложением данной работы является эффективное вычисление коэффициентов эллиптических родов уровня N для $N = 2, 3, 4, 5, 6$ в терминах решений дифференциального уравнения с параметрами в неприводимом алгебраическом многообразии в $\mathbb{C}^4$.

Коммутативной одномерной формальной группой [10] над коммутативным кольцом R с единицей называется формальный ряд

$$F(u, v) = u + v + \sum a_{i,j} u^i v^j, \quad a_{i,j} \in R, \quad i > 0,\ j > 0,$$

удовлетворяющий условию ассоциативности $F\big(u, F(v, w)\big) = F\big(F(u, v), w\big)$.

Ряд $f(z) \in R \otimes \mathbb{Q}[[z]]$, однозначно определяемый условиями

$$f(z_1 + z_2) = F\big(f(z_1), f(z_2)\big), \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = 1,$$

называется экспонентой формальной группы $F(u, v)$. Род Хирцебруха, определяемый экспонентой формальной группы $F(u, v)$, обладает свойством R-целочисленности.

Формальная группа $\mathcal{F}(u, v) = u + v + \sum \alpha_{i,j} u^i v^j$ над кольцом $\mathcal{R}$ называется универсальной формальной группой, если для любой формальной группы $F(u, v)$ над некоторым кольцом R существует единственный гомоморфизм $r : \mathcal{R} \to R$ такой, что $F(u, v) = u + v + \sum r(\alpha_{i,j}) u^i v^j$. Гомоморфизм r называется классифицирующим.

Формальная группа $F(u, v)$ над кольцом R называется формальной группой Бухштабера, если её можно представить в виде

$$F(u, v) = \frac{u^2 A(v) - v^2 A(u)}{u B(v) - v B(u)},$$

где $A(u) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i u^i,\ a_i \in R,\ B(u) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} b_i u^i,\ b_i \in R.$

Эллиптической функцией уровня N с решёткой Γ называется мероморфная функция f, такая что $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, и $g(z) = f(z)^N$ является эллиптической функцией с решёткой периодов Γ и дивизором $N \cdot 0 - N \cdot \rho$ для $\rho \in \mathbb{C}$. Эллиптическая функция уровня N задаёт эллиптический род уровня N как род Хирцебруха.

Известно, что эллиптическая функция уровня N является специализацией функции Кричевера, задающей род Кричевера. Функция Кричевера является экспонентой универсальной формальной группы Бухштабера.

В работе “Универсальная формальная группа для эллиптического рода уровня N” предложена специализация формальной группы Бухштабера, задающая формальные группы, соответствующие эллиптическому роду уровня N:

Эллиптическая функция уровня N является экспонентой формальной группы вида
$$F(u,v) = \frac{u^2A(v) - v^2A(u)}{uB(v) - vB(u)},$$
где $A(u), B(u) \in \mathbb{C}[[u]]$, $A(0) = B(0) = 1$, $A''(0) = B'(0) = 0$, и при $n = \left[\frac{N-1}{2}\right]$, $m = \left[\frac{N-2}{2}\right]$ существуют параметры $(a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n)$, такие что выполнено соотношение
$$(B(u)+b_1u)^2(B(u)+b_2u)^2\ldots(B(u)+b_{n-1}u)^2(B(u)+b_nu)^{N-2n} =$$
$$= A(u)^2(A(u)+a_1u^2)^2\ldots(A(u)+a_{m-1}u^2)^2(A(u)+a_mu^2)^{N-1-2m}.$$
Для универсальной формальной группы такого вида экспонента является эллиптической функцией уровня не более чем N.

Это предложение является обобщением на $N > 2$ известного результата, что эллиптическая функция уровня 2, задающая эллиптический род Оshанина–Виттена, является экспонентой универсальной формальной группы вида
$$F(u,v) = \frac{u^2 - v^2}{uB(v) - vB(u)},$$
где $B(u) \in \mathbb{C}[[u]]$, $B(0) = 1$, $B'(0) = 0$.

В работе “Универсальная формальная группа для эллиптического рода уровня N” это предложение доказано для $N = 3, 4, 5, 6$. Также доказано, что эллиптическая функция уровня 7 является экспонентой формальной группы такого вида. Впервые получены универсальные формальные группы, соответствующие эллиптическому роду уровня N, где $N = 5, 6, 7$.

Таким образом, по проекту исследований по теме “Формальные группы и роды Хирцебруха” получены важные результаты. Построены формальные группы, задающие роды Хирцебруха уровня N для $N = 5, 6$. Классифицированы комплексные роды Хирцебруха, послойно мультипликативные относительно $\mathbb{C}P^{n-1}$ для $n \leqslant 6$.

Результаты опубликованы в работах:

- Е. Ю. Бунькова,
  “Функциональное уравнение Хирцебруха: классификация решений”,
  Топология и физика, Сборник статей. К 80-летию со дня рождения академика Сергея Петровича Новикова, Тр. МИАН, 302,
  МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 2018, 41–56.
- Е. Ю. Бунькова,
  “Универсальная формальная группа для эллиптического рода уровня N”,
  Алгебраическая топология, комбинаторика и математическая физика,
  Сборник статей. К 75-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН Виктора Матвеевича Бухштабера, Тр. МИАН, 305, МИАН, М., 2019, 40–60.

2. Результаты, полученные в 2019 году

2.1. **Теория сигма-функций. Приложения к уравнениям математической физики.**

Задача дифференцирования абелевых функций по параметрам удалось получить ряд общих результатов для произвольного рода g, а также полностью её решить в случае $g = 4$ в качестве следствия результатов, полученных в этом году совместно с В.М. Бухштабером.

В работе "On the problem of differentiation of hyperelliptic functions" разрабатывается метод для решения этой задачи для любого рода g. Метод основан на построении $3g$ полиномальных векторных полей, проектируемых относительно заданного полиномиального отображения. Эти поля градуированы. Явно построены g векторных полей нечётной градуировки и показана их связь с иерархией Кортевега–де Фриза. Получены условия на алгебру Ли для $2g$ векторных полей чётной градуировки.

В работе "Алгебры Ли операторов теплопроводности в неголономном репере" построены алгебры Ли систем из $2g$ градуированных операторов теплопроводности $Q_0, Q_2, ..., Q_{4g-2}$, определяющих сигма-функции $\sigma(z, \lambda)$ гиперэллитических кривых рода $g = 1, 2$ и 3. Операторы $\{\mathcal{L}_{2k}\}$, решающие задачу дифференцирования абелевых функций по параметрам, описанную выше, получаются из этих операторов преобразованием, являющимся многомерным аналогом преобразования Коула–Хопфа. Ключевым при построении операторов $\{Q_{2k}\}$ при $g \geqslant 4$ является результат о том, что структурные константы алгебры Ли этих операторов совпадают с таковыми для алгебры Ли соответствующих векторных полей в пространстве $\mathbb{C}^{2g} \ni (\lambda_4, \lambda_6, \ldots, \lambda_{4g+2})$ параметров кривых. Эти векторные поля, касающиеся дискриминанта, известны явно для любого g. В качестве следствия этого результата получено, что системы из трёх операторов Q_0, Q_2 и Q_4 уже достаточно, чтобы определить сигма-функции.

Важность этого результата состоит в том, что взяв за определения полученные формулы для системы операторов $\{Q_{2k}\}$, всю теорию гиперэллиптических функций можно строить на этой основе, в частности это позволит эффективно вычислять коэффициенты разложения в ряд гиперэллиптических функций, см. [5].

В работе "Алгебры Ли операторов теплопроводности в неголономном репере" для любого решения $\varphi(z, \lambda)$ системы уравнений теплопроводности мы вводим градуированное кольцо $\mathcal{R}_\varphi$, порождённое логарифмическими производными от функции $\varphi(z, \lambda)$ порядка не менее 2 и в явном виде предъявляем алгебру Ли дифференцирований кольца $\mathcal{R}_\varphi$. Показана связь этой алгебры Ли с нашей системой нелинейных уравнений. В случае, когда $\varphi(z, \lambda) = \sigma(z, \lambda)$, это приводит к известному результату построения алгебры Ли дифференцирований гиперэллитических функций рода $g = 1, 2, 3$.

В работе "Explicit Heat Equations in Nonholomic Frame and Applications" получены формулы, обобщающие результаты работы "Алгебры Ли операторов теплопроводности в неголономном репере" на произвольный род g. На основе этих результатов в работе "Differentiation of Genus 4 Hyperelliptic Functions" приведён явный вид решения задачи дифференцирования абелевых функций по параметрам в случае $g = 4$.

2.2. **Формальные группы и роды Хирцебруха.**

В работе “Универсальная формальная группа для эллиптического рода уровня N” предложена специализация формальной группы Бухштабера, задающая формальные группы, соответствующие эллиптическому роду уровня N:

Эллиптическая функция уровня N является экспонентой формальной группы вида

$$F(u,v) = \frac{u^2 A(v) - v^2 A(u)}{uB(v) - vB(u)},$$

где $A(u), B(u) \in \mathbb{C}[[u]]$, $A(0) = B(0) = 1$, $A''(0) = B'(0) = 0$, и при $n = \left[\frac{N-1}{2}\right]$, $m = \left[\frac{N-2}{2}\right]$ существуют параметры $(a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n)$, такие что выполнено соотношение

$$(B(u) + b_1 u)^2 (B(u) + b_2 u)^2 \ldots (B(u) + b_{n-1} u)^2 (B(u) + b_n u)^{N-2n} =$$
$$= A(u)^2 (A(u) + a_1 u^2)^2 \ldots (A(u) + a_{m-1} u^2)^2 (A(u) + a_m u^2)^{N-1-2m}.$$

Для универсальной формальной группы такого вида экспонента является эллиптической функцией уровня не более чем N.

Это предложение является обобщением на $N > 2$ известного результата, что эллиптическая функция уровня 2, задающая эллиптический род Оханина–Виттена, является экспонентой универсальной формальной группы вида

$$F(u,v) = \frac{u^2 - v^2}{uB(v) - vB(u)},$$

где $B(u) \in \mathbb{C}[[u]]$, $B(0) = 1$, $B'(0) = 0$.

В работе “Универсальная формальная группа для эллиптического рода уровня N” это предложение доказано для $N = 3, 4, 5, 6$. Также доказано, что эллиптическая функция уровня 7 является экспонентой формальной группы такого вида. Впервые получены универсальные формальные группы, соответствующие эллиптическому роду уровня N, где $N = 5, 6, 7$.

3. Научные работы за 2019 год

- Опубликована работа Elena Yu. Bunkova,
  “On the problem of differentiation of hyperelliptic functions”,
  European Journal of Mathematics, 5:3 (2019), 712–719, arXiv: 1812.04245
- Опубликована работа Е. Ю. Бунькова,
  “Универсальная формальная группа для эллиптического рода уровня N”,
  Алгебраическая топология, комбинаторика и математическая физика,
  Сборник статей. К 75-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН Виктора Матвеевича Бухштабера, Тр. МИАН, 305, МИАН, М., 2019, 40–60.
- Подана в печать работа В. М. Бухштабер, Е. Ю. Бунькова “Алгебры Ли операторов теплопроводности в неголономном репере”, arXiv:1911.08266.
- Подготовлена работа V. M. Buchstaber, E. Yu. Bunkova
  “Explicit Heat Equations in Nonholomic Frame and Applications”.
- Подготовлена работа V. M. Buchstaber, E. Yu. Bunkova
  “Differentiation of Genus 4 Hyperelliptic Functions”.

4. Участие в конференциях и школах за 2019 год

- Доклад "Universal Formal Group for Elliptic Genus of Level N", Международная конференция «Baikal Number Theory», остров Ольхон, 26-30 августа 2019.
- Доклад "Lie algebras of heat operators in nonholonomic frame", Международная конференция «Topological methods in dynamics and related topics», Нижний Новгород, 9-13 декабря 2019.

5. Педагогическая деятельность за 2019 год

Приняла участие в подготовке LXXXII Московской Математической Олимпиады.

Список литературы

[1] Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон *Курс современного анализа, ч. 2. Трансцендентные функции*, Москва, УРСС, 2010.

[2] V. M. Buchstaber, V. Z. Enolskii, D. V. Leikin, "Hyperelliptic Kleinian functions and applications", Solitons, Geometry and Topology: On the Crossroad, AMS Trans. 2, **179** (1997), 1–33.

[3] V. M. Buchstaber, V. Z. Enolskii, D. V. Leikin, "Kleinian functions, hyperelliptic Jacobians and applications", Reviews in Mathematics and Math. Physics, **10** (1997), part 2, Gordon and Breach, London, 3–120.

[4] Г. Ф Бейкер, "Абелевы функции. Теорема Абеля и связанная с ней теория тэта-функций", Москва, МЦНМО, 2008.

[5] В. М. Бухштабер, Д. В. Лейкин, "Решение задачи дифференцирования абелевых функций по параметрам для семейств (n,s)-кривых", Функц. анализ и его прил., 42:4, 2008, 24–36.

[6] F. G. Frobenius, L. Stickelberger, *Über die Differentiation der elliptischen Functionen nach den Perioden und Invarianten*, J. Reine Angew. Math., 92 (1882), 311–337.

[7] В. М. Бухштабер, "Полиномиальные динамические системы и уравнение Кортевега–де Фриза", Современные проблемы математики, механики и математической физики. II, Сборник статей, Тр. МИАН, 294, МАИК, М., 2016.

[8] V. M. Buchstaber, T. E. Panov, *Toric Topology*, Mathematical Surveys and Monographs, 204, Amer. Math. Soc., 2015.

[9] F. Hirzebruch, T. Berger, R. Jung, *Manifolds and modular forms*, Aspects Math., E20, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1992.

[10] M. Hazewinkel, "Formal groups and applications", Academic Press, New York, San Francisco, London, 1978.