Отчет лауреата конкурса "Молодая математика России"

Антон Щечкин

15 декабря 2018 г.

Из формальных вещей, в этом году мы с моим научным руководителем Михаилом Берштейном выпустили препринт [1], посвященный $c = -2$ тау-функциям. Работа над этим вопросом была начата еще в прошлом году, однако только недавно дошла до стадии текста.

Мы изучали свойства так называемых $c = -2$ тау-функций, которые определяются как ряды Фурье от $c = -2$ конформного блока алгебры Вирасоро

$$\tau^{\pm}(\sigma, s|z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} s^n \mathcal{Z}^{\pm}_{c=-2}(\sigma + n|z). \tag{0.1}$$

Этот ряд является прямым аналогом ряда для тау-функции уравнений Пенлеве, предложенного Гамаюном-Иорговым-Лисовым в 2012 году. Отличие лишь в центральном заряде, который в той тау-функции был равен $c = 1$. Вообще, ряд Фурье от различных конформных блоков с $c = 1$ (которые равны некрасовским статсуммам с $\epsilon_1 + \epsilon_2 = 0$ согласно АГТ-соответствию) дает ответы для тау-функций различных уравнений Пенлеве и их многочисленных обобщений.

Мы показали, что тау-функция Пенлеве III$(D_8^{(1)})$ раскладывается по $c = -2$ тау-функциям

$$\tau(\sigma, s|z) = \tau^{+}(\sigma, s|z)\tau^{-}(\sigma, s|z), \tag{0.2}$$

Это разложение следует из соотношений раздутия Накаджимы-Ешиоки на статсуммы Некрасова

$$\mathcal{Z}(a; \epsilon_1, \epsilon_2|\Lambda) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{Z}(a + 2\epsilon_1 n; \epsilon_1, \epsilon_2 - \epsilon_1|\Lambda)\mathcal{Z}(a + 2\epsilon_2 n; \epsilon_1 - \epsilon_2, \epsilon_2|\Lambda). \tag{0.3}$$

в случае $\epsilon_1 + \epsilon_2 = 0$. Существует и аналог этого утверждения для тау-функции Пенлеве VI.

Основная идея нашей работы заключается в том, что данное разложение на множители естественно с точки зрения очень разных подходов к соответствию между изомонодромными деформациями и конформной теорией поля, хотя до полного понимания этого явления еще далеко.

- Дифференциальные соотношения Накаджимы-Ёшиоки дают нам дифференциальные соотношения, которые связывают тау-функцию τ уравнения Пенлеве III$(D_8^{(1)})$ и её преобразование Бэклунда τ_1 с $c = -2$ тау-функциями

  $$D^1_{[\log z]}(\tau^-, \tau^+) = z^{1/4}\tau_1, \qquad D^2_{[\log z]}(\tau^-, \tau^+) = 0. \tag{0.4}$$

  Из первых двух уравнений, используя также разложение $\tau = \tau^+\tau^-$ мы получили

  $$D^2_{[\log z]}(\tau, \tau) = -2z^{1/2}\tau_1^2 \tag{0.5}$$

  которое вместе со своим преобразованием Бэклунда дает нам тау-форму Пенлеве III$(D_8^{(1)})$.

- Интерес к тау-функциям с $c=-2$ также связан с тем, что ранее изомонодромным деформациям соответствовал только центральный заряд $c=1$ и выйти из этого условия можно было только квантованием пространства начальных данных. Однако, подход Тешнера, Иоргова и Лисового к изомонодромной тау-функции допускает не только $c=1$, но и центральные заряды минимальных моделей $M(1,n), n\in\mathbb{Z}$, первый из которых — $c=-2$. Те же условия на центральные заряды возникают и при рассмотрении уравнений раздутия на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$. Так, например, мы получили, что соотношения между классическими конформными блоками и $c=-2$ конформными блоками суммируются в соотношения на $c=-2$ тау-функцию
$$f'(z)\tau_l(\rho,\widetilde{s}|z)=-f(z)\tau_l'(\rho,\widetilde{s}|z)|_{\widetilde{s}=e^{-2\rho\frac{df(z)}{d\delta}}} \tag{0.6}$$

- Появление $c=-2$ тау-функций также естественно с точки зрения матричных моделей. В работе Миронова и Морозова в 2017 году было предложено, что при резонансных условиях на параметры и начальные данные тау-функция Пенлеве VI дается коррелятором из вертексных операторов свободных бозонов с N вставленными скринингами, который равен
$$\int_C\cdots\int_C\prod_{i>j}(y_i-y_j)^{\beta=2}\prod_i w(y_i)dy_i, \tag{0.7}$$
с весом $w(y)$ интегрального представления функции ${}_2F_1$. Интеграл такого типа с весом w появляется в матричных моделях унитарного ансамбля. Он может быть представлен в виде ганкелевского детерминанта размера N от гипергеометрических функций ${}_2F_1$. Мы доказали, что $c=-2$ тау-функция, построенная по четырехточечным конформным блокам в резонансном случае дается интегралом вида (0.7) только с $\beta=1$ или $\beta=4$ в зависимости от скрининга, что соотвествует ортогональному и симплектическому ансамблю. Они имеют пфаффианное представление. Однако, что значит разложение $c=1$ тау-функции по $c=-2$ тау-функциям в резонасном случае в терминах пфаффианов, мы так и не смогли понять.

- Еще нам удалось дать определение $c=-2$ тау-функции в терминах линейного уравнения по аналогии с тем, как определяется изомонодромная тау-функция уравнения Пенлеве VI. Из соотношения D^2 из (0.4) и $\tau=\tau^+\tau^-$ мы получили
$$z\frac{d}{dz}\tau^{\pm}=\frac{1}{2}(\zeta\mp i\sqrt{\zeta'})\tau^{\pm}. \tag{0.8}$$
где ζ — это гамильтониан уравнения Пенлеве III$(D_8^{(1)})$.

- Аналогичное разложение на $c=-2$ тау-функции мы можем получить и для q-деформации $c=1$ тау-функции. Так же, как и в случае $c=1$ тау-функции, мы должны перейти от 4-х мерной Некрасовской статсумме к 5-мерной. Разностные соотношения будут иметь вид
$$\overline{\tau^+}\underline{\tau^-}+\underline{\tau^+}\overline{\tau^-}=2\tau,\quad \overline{\tau^+}\underline{\tau^-}-\underline{\tau^+}\overline{\tau^-}=-2z^{1/4}\tau_1, \tag{0.9}$$
где $\overline{f(z)}=f(qz), \underline{f(z)}=f(q^{-1}z)$. Отсюда следует уравнение
$$\overline{\tau}\underline{\tau}=\overline{\tau^+\tau^-}\,\underline{\tau^+\tau^-}=\frac{1}{4}(\overline{\tau^+}\underline{\tau^-}+\underline{\tau^+}\overline{\tau^-})^2-\frac{1}{4}(\overline{\tau^+}\underline{\tau^-}-\underline{\tau^+}\overline{\tau^-})^2=\tau^2-z^{1/2}\tau_1^2, \tag{0.10}$$
которое вместе со своим преобразованием Бэклунда — это уравнение Пенлеве $A_7^{(1)'}$ (q-деформация Пенлеве III$(D_8^{(1)})$) в тау-форме — т.н. уравнения типа Тоды. Таким образом, поскольку соотношения Накаджимы-Ёшиоки доказаны, мы задешево получили доказательство формулы для тау-функции Пенлеве $A_7^{(1)'}$, предложенной нами в 2016 году. Действуя аналогично, мы доказали, что тау-функция Пенлеве $A_7^{(1)}$ $\overline{\overline{\tau}}\underline{\underline{\tau}}=\tau^2-z^{1/2}\overline{\tau}\underline{\tau}$ дается рядом Фурье от 5d некрасовских статсумм, модифицированных членом Черн-Саймонса уровня 1.

- Мы показали, что уравнения (0.9) задают вместе с $\tau = \tau^+\tau^-$ динамику на $c = -2$ тау-функции, которая совпадает с уравнением q-Пенлеве VI при $q^{\theta_0} = q^{\theta_z} = q^{\theta_1} = q^{\theta_\infty} = i$. В 2017 году для q-Пенлеве VI Джимбо, Нагоя, Сакаи предложили выражение для тау-функции в виде ряда Фурье от 5d Некрасовских статсумм с 4-мя полями материи. Из этого мы получили и проверили гипотезу на равенство некрасовской статсуммы без материи с $\epsilon_1 = -2\epsilon_2$ и некрасовской статсуммы с $\epsilon_1 = -\epsilon_2$ и четырьмя материями определенных масс
$$(-qz^{1/2}; q, q)^2_\infty \mathcal{Z}_{inst}(i, i, i, iq^{\pm 1/2}, u; q^{-1}, q|z^{1/2}) = \mathcal{Z}_{inst}(u; q^{-1}, q^2|z). \tag{0.11}$$

- Бонелли, Грасси и Танзини в 2017 году обнаружили, что тау-функция Пенлеве III($D_8^{(1)}$) в специальном случае $|q| = 1, s = 1$ равна спектральному детерминанту Ξ от оператора, обратного гамильтониану релятивистской Тоды. Более того, для $z = q^M$, $M \in \mathbb{Z}$, Ξ становится статсуммой большого канонического ансамбля для ABJ теории. В этом случае существует естественное разбиение $\Xi = \Xi^+\Xi^-$ по четности собственных состояний. В 2014 году Грасси, Хатсуда, Мариньо предложили, что $\Xi^\pm$ удовлетворяют вронскианно-подобным соотношениям. Мы получили, что эти вронскианно-подобные соотношения эквивалентны уравнениям (0.9) т.е. это разбиение тау-функции на множители — разбиение на $c = -2$ тау-функции.

- Вопросы в стадии решения:
  - Обобщение $c = -2$ тау-функций на случай тау-функции Пенлеве VI
  - Соотношений Накаджимы-Ёшиоки как соотношения на пфаффианы
  - Постановка задачи Римана-Гильберта для $c = -2$ тау-функции
  - Обобщение подхода $c = -2$ тау-функций к уравнению Тоды на большее число узлов
  - Представление $c = -2$ тау-функции как коррелятора симплектических фермионов

Препринты, вышедшие в этом году

M. Bershtein, A. Shchechkin, *Painlevé equations from Nakajima-Yoshioka blow-up relations*, [`arXiv:1811.04050`].

Доклады на конференциях, школах, семинарах

- *Связь между стандартной реализацией квантовой аффинной алгебры и новой реализацией Дринфельда*, Школа PreCQIS-2018 (Протвино, 25-29 июня 2018)
- *Bilinear relations on q-Virasoro conformal blocks and certain q-Painleve equation*, Conference CQIS-2018 (Protvino, 2-6 July 2018))
- *Proof of the power series formula for the q-Painleve III tau function*, Workshop Tau Functions of Integrable Systems and Their Applications (Banff, Alberta, Canada, 2-7 September 2018)
- *Painlevé equations from Nakajima-Yoshioka blow-up relations*, Conference SIDE13 (Fukuoka, Japan, 11-17 November 2018)
- *Уравнения Пенлеве из соотношений раздутия Накаджимы-Ёшиоки*, Семинар "Современные методы математической физики"(НИУ ВШЭ, Москва, 12 декабря 2018)

Педагогическая активность

Учебный ассистент на курсе "Гладкие многообразия"на факультете математики НИУ ВШЭ весной 2018 года. и учебный ассистент на курсе "Функциональный анализ"на факультете математики НИУ ВШЭ осенью 2018 года.