ОТЧЕТ

Шрамова Константина Александровича
по гранту “Молодая математика России”

1. Результаты 2018 года

1.1. **Автоморфизмы геометрически рациональных поверхностей.** Совместно с В. Вологодским я изучал группы автоморфизмов геометрически рациональных поверхностей над алгебраически незамкнутыми полями. Отправной точкой наших размышлений послужила следующая теорема, доказанная Т. Бандман и Ю. Зархиным в 2015 году.

Теорема. *Пусть K — поле характеристики нуль, содержащее все корни из единицы. Пусть C — коника, определенная над K. Предположим, что C не имеет K-точек. Тогда любая конечная подгруппа в группе автоморфизмов C состоит не более чем из 4 элементов.*

Заметим, что коника с точкой всегда изоморфна проективной прямой, то есть из теоремы Бандман и Зархина можно получить описание конечных подгрупп в группах автоморфизмов всех возможных коник.

В 2016 году мы с Ю. Прохоровым получили частичное обобщение этой теоремы на двумерный случай.

Теорема. *Пусть K — поле характеристики нуль, содержащее все корни из единицы. Пусть S — геометрически рациональная поверхность над K. Предположим, что S имеет K-точку. Тогда либо S рациональна над K, либо порядки конечных погрупп в группе бирациональных автоморфизмов S ограничены.*

Однако это обобщение нельзя было считать полным: в отличие от теоремы Бандман и Зархина, мы предполагали существование точки на поверхности. В 2018 году в совместной работе с В. Вологодским мне удалось исправить этот недостаток. Мы доказали следующее:

Теорема. *Пусть K — поле характеристики нуль, содержащее все корни из единицы. Пусть S — геометрически рациональная поверхность над K. Тогда либо S бирациональна произведению коники и проективной прямой над K, либо порядки конечных погрупп в группе бирациональных автоморфизмов S ограничены.*

Заметим, что если дополнительно предположить существование точки на поверхности S, то из этого результата моментально следует предыдущая теорема. Кроме того, из него можно получить такое занятное следствие.

Следствие. *Пусть K — поле характеристики нуль, содержащее все корни из единицы. Пусть S — поверхность Севери–Брауэра над K. Предположим, что S не изоморфна проективной плоскости. Тогда порядки конечных погрупп в группе бирациональных автоморфизмов S ограничены.*

Для доказательства этого следствия достаточно заметить, что если поверхность Севери–Брауэра S бирациональна произведению коники и проективной прямой, то она имеет точку степени 2 или 4, а это возможно только в случае, если S изоморфна проективной плоскости.

1.2. **Многообразия Фано типа V_{22}.** Вместе с И. Чельцовым мы занимались геометрией трехмерных многообразий Фано типа V_{22} с действием одномерного тора. Это семейство многообразий Фано интересно с разных точек зрения. Во-первых, многообразия из этого семейства имеют максимально возможную степень среди всех гладких трехмерных многообразий Фано, ранг Пикара и индекс которых равны 1. Во-вторых, среди всех таких семейств это единственное семейство, в котором встречаются многообразия с бесконечной группой автоморфизмов. В частности, группа автоморфизмов одного из этих многообразий, так называемого многообразия Мукая–Умемуры, изоморфна $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$. Это многообразие содержится в одномерном подсемействе V_u^*, $u \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$, многообразий, группа автоморфизмов которых содержит группу $\Gamma \cong \mathbb{C}^* \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; более того, для всех членов этого семейства, кроме многообразия Мукая–Умемуры, группа автоморфизмов изоморфна Γ. Наконец, для одного из многообразий типа V_{22} связная компонента единицы в группе автоморфизмов изоморфна аддитивной группе $\mathbb{C}^+$.

Уже много лет было известно, что среди многообразий типа V_{22} имеются как такие, которые допускают метрику Кэлера–Эйнштейна (например, многообразие Мукая–Умемуры), так и такие, которые не допускают. С. Дональдсон предположил, что все многообразия из семейства V_u^* допускают такую метрику. Недавно Г. Капустка, М. Капустка и С. Динев пытались доказать эту гипотезу, оценив альфа-инварианты таких многообразий, но не справились: оценка на альфа-инварианты получилась такой, что она не давала никаких приложений к метрикам Кэлера–Эйнштейна. Мы с И. Чельцовым воспользовались полученной в 2017 году А. Кузнецовым и Ю. Прохоровым подробной бирациональной конструкцией многообразий V_u^* и подсчитали точные значения альфа-инвариантов многообразий из семейства V_u^*. Мы доказали следующую теорему:

Теорема. *Пусть $u \neq \frac{3}{4}$ и $u \neq 2$. Тогда Γ-эквивариантный альфа-инвариант многообразия V_u^* равен $\frac{4}{5}$. В частности, такие многообразия допускают метрику Кэлера–Эйнштейна.*

1.3. **Автоморфизмы трехмерных многообразий Фано.** Вместе с В. Пржиялковским и И. Чельцовым я изучал группы автоморфизмов трехмерных многообразий Фано. Несколько лет назад в нашей совместной работе с А. Кузнецовым и Ю. Прохоровым была доказана следующая теорема:

Теорема. *Пусть X — гладкое трехмерное многообразие Фано, ранг Пикара которого равен 1. Тогда группа автоморфизмов X бесконечна в том и только том случае, если X — одно из следующих многообразий:*

- *трехмерное проективное пространство;*
- *трехмерная квадрика;*
- *многообразие дель Пеццо V_5;*
- *одно из специальных многообразий типа V_{22}.*

Вместе с В. Пржиялковским и И. Чельцовым мы классифицировали все гладкие трехмерные многообразия Фано, группы автоморфизмов которых бесконечны. Таких многообразий оказалось довольно много (они встречаются в 63 деформационных семействах гладких трехмерных многообразий Фано из 105 возможных). Для каждого из них мы описали связную компоненту единицы в группе автоморфизмов.

1.4. **Числа Ходжа взвешенных полных пересечений.** Вместе с В. Пржиялковским я занимался оценками на числами Ходжа гладких взвешенных полных пересечений Фано. Мы интересовались такими гладкими взвешенными полными пересечениями Фано, числа Ходжа которых либо устроены так же, как у проективного пространства, либо лежат на диагонали, либо (после откидывания "хвостов" из нулей) устроены так же, как у кривой, поверхности $K3$, или многообразия Калаби–Яу. Описание многообразий первого типа является классической задачей. Многообразия остальных типов естественно возникают, если наложить определенные требования на производную категорию когерентных пучков на многообразии (соответственно, существование полного исключительного набора, либо существование неполного исключительного набора, полуортогональное дополнение к которому изоморфно производной категории когерентных пучков на кривой, поверхности $K3$, или трехмерном многообразии Калаби–Яу). В общем случае классификация таких многообразий выглядит неподъемной задачей. Однако в частном случае взвешенных полных пересечений нам удалось классифицировать все таки многообразия (их оказалось немного, и более того, все примеры таких взвешенных полных пересечений уже встречались в литературе). Например, единственным гладким взвешенным полным пересечением Фано, числа Ходжа которого устроены "примерно как у поверхности $K3$", оказалась кубическая гиперповерхность в $\mathbb{P}^5$.

2. Работы

2.1. **Книга.** Вышла из печати ранее написанная книга, а также (в другом издательстве) ее немного расширенный перевод на английский язык.

С. О. Горчинский, К. А. Шрамов. Неразветвленная группа Брауэра и ее приложения. МЦНМО, Москва, 2018, 200 с. ISBN: 978-5-4439-1271-4.

S. Gorchinskiy, C. Shramov. Unramified Brauer group and its applications. Translations of Mathematical Monographs, 246. American Mathematical Society, Providence, RI, 2018, xvii+179 pp. ISBN: 978-1-4704-4072-5

2.2. **Препринты.** Были опубликованы препринты:

(1) V. Przyjalkowski, C. Shramov, *Hodge complexity for weighted complete intersections*, arXiv:1801.10489.
(2) I. Cheltsov, C. Shramov, *Kaehler–Einstein Fano threefolds of degree* 22, arXiv:1803.02774.
(3) C. Shramov, V. Vologodsky, *Automorphisms of pointless surfaces*, arXiv:1807.06477.
(4) I. Cheltsov, J. Park, C. Shramov, *Delta invariants of singular del Pezzo surfaces*, arXiv:1809.09221.
(5) I. Cheltsov, V. Przyjalkowski, C. Shramov, *Fano threefolds with infinite automorphism groups*, arXiv:1809.09223.

2.3. **Статьи.** Вышли из печати ранее написанные статьи:

(1) A. Kuznetsov, Yu. Prokhorov, C. Shramov, *Hilbert schemes of lines and conics and automorphism groups of Fano threefolds*, Jpn. J. Math., 13:1 (2018), 109–185.
(2) Yu. Prokhorov, C. Shramov, *p-subgroups of the space Cremona group*, Math. Nachr., 291:8–9 (2018), 1374–1389.
(3) Yu. Prokhorov, C. Shramov, *Finite groups of birational selfmaps of threefolds*, Math. Res. Lett., 25:3 (2018), 957–972.
(4) I. Cheltsov, J. Park, C. Shramov, *Alpha-invariants and purely log terminal blow-ups*, Eur. J. Math., 4:3 (2018), 845–858.

3. Участие в конференциях

В 2018 году я принимал участие в следующих мероприятиях:

(1) Конференция “Dynamics in Siberia”, Институт математики им. С. Л. Соболева, Новосибирск, 26 февраля – 3 марта 2018, доклад “Automorphisms of complex surfaces”.
(2) Oberwolfach workshop “Subgroups of Cremona Groups”, MFO, Обервольфах, Германия, 17–23 июня 2018, доклад “Boundedness for groups of birational selfmaps”.
(3) Летняя школа и конференция по группам Брауэра, ВШЭ, Москва, 25–29 июня 2018, серия докладов “Многообразия Севери–Брауэра”.
(4) Конференция “Computational mathematics and algebraic geometry”, Институт Иоганна Кеплера, Линц, Австрия, 8–10 августа 2018, доклад “Finite groups acting by automorphisms of compact complex surfaces”.
(5) Сибирская летняя школа “Current developments in Geometry”, Институт математики им. С. Л. Соболева, Новосибирск, 27 августа – 1 сентября 2018, доклад “Severi–Brauer varieties and their automorphisms”.
(6) Конференция “Современная математика и ее приложения”, МИАН, Москва, 19 ноября 2018, доклад “Конечные группы бирациональных автоморфизмов”.

4. Организация конференций и семинаров

Я являюсь (совместно с Д. Орловым, Ю. Прохоровым и В. Пржиялковским) соруководителем семинара Исковских, проходящего в МИАН. Также являюсь (совместно с Д. Орловым и Ю. Прохоровым) соруководителем учебного семинара по алгебраической геометрии в научно-образовательном центре МИАН.

Принимал участие (совместно с Ю. Прохоровым) в организации двух школ-конференций по бирациональной геометрии в ВШЭ 26–30 марта и 29–31 октября 2018. Принимал участие (совместно с многими другими) в организации школы и конференции “Алгебра и геометрия” в ЯГПУ, Ярославль, 23–31 июля 2018.