ОТЧЕТ

Шрамова Константина Александровича
по гранту “Молодая математика России”

1. Результаты 2019 года

1.1. Автоморфизмы поверхностей Севери–Брауэра. Многообразием Севери–Брауэра называется форма проективного пространства. Другими словами, это многообразие, которое становится изоморфно проективному пространству после перехода к алгебраическому замыканию основного поля. Имеется хорошо проработанная классическая теория таких многообразий, связывающая их с центральными простыми алгебрами. В частности, известно, что многообразие Севери–Брауэра, имеющее точку над полем определения, само изоморфно проективному пространству.

В 2018 году В. Вологодским и мной был доказан следующий результат.

Теорема. *Пусть K — поле характеристики нуль, содержащее все корни из единицы. Пусть S — геометрически рациональная поверхность над K. Тогда либо S бирациональна произведению коники и проективной прямой над K, либо порядки конечных погрупп в группе бирациональных автоморфизмов S ограничены.*

Из этого легко вывести

Следствие. *Пусть K — поле характеристики нуль, содержащее все корни из единицы. Пусть S — поверхность Севери–Брауэра над K. Предположим, что S не изоморфна проективной плоскости. Тогда порядки конечных погрупп в группе бирациональных автоморфизмов S ограничены.*

В 2019 году я получил более точные результаты о структуре конечных групп, действующих бирациональными автоморфизмами поверхностей Севери–Брауэра. А именно, была доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть S — поверхность Севери–Брауэра над полем K нулевой характеристики, не имеющая K-точек. Пусть $G \subset \mathrm{Bir}(S)$ — конечная подгруппа. Выполнены следующие утверждения.*

(i) *Группа G имеет нечетный порядок.*
(ii) *Группа G либо является абелевой, либо содержит нормальную абелеву подгруппу индекса 3.*
(iii) *Если поле K содержит все корни из 1, то G является абелевой 3-группой порядка не более 27.*

Основным техническим шагом при доказательстве этого результата было следующее утверждение, которое, как мне кажется, интересно само по себе.

Предложение. *Пусть S — поверхность Севери–Брауэра над полем нулевой характеристики, не имеющая точек над этим полем. Пусть $G \subset \mathrm{Bir}(S)$ — конечная неабелева подгруппа. Тогда G сопряжена подгруппе в $\mathrm{Aut}(S)$.*

Интересно сравнить утверждение (ii) из предыдущей теоремы с его хорошо известным аналогом для случая проективной плоскости (то есть единственной поверхности Севери–Брауэра, имеющей K-точку). В этом случае имеется результат

Ж.-П. Серра, согласно которому любая конечная подгруппа в группе бирациональных автоморфизмов содержит нормальную абелеву подгруппу, индекс которой делит число $2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$. Другая версия этого результата, принадлежащая Е. Ясинскому, утверждает, что любая конечная подгруппа в группе бирациональных автоморфизмов содержит нормальную абелеву подгруппу, индекс которой не превосходит 7200, причем эту оценку нельзя улучшить.

1.2. **Многообразия дель Пеццо степени 1 с 28 особыми точками.** Алгебраические многообразия с максимальным возможным количеством изолированных особенностей частно обладают интересными геометрическими свойствами. Примером такого многообразия является кубика Сегре; это трехмерная кубическая гиперповерхность с 10 особыми точками, что является максимально возможным количеством особенностей в этом классе многообразий. Наряду с трехмерными кубиками, которые являются многообразиями дель Пеццо степени 3, с такой точки зрения рассматривались трехмерные многообразия дель Пеццо степени 2 и 1. В первом случае известно, что максимальное количество изолированных особенностей для таких многообразий равно 16, и многообразия с таким количеством особых точек являются двойными накрытиями $\mathbb{P}^3$ с ветвлением в куммеровой квартике. Во втором случае известно, что максимальное количество изолированных особенностей равно 28.

В 2019 году в моей совместной работе с Х. Ахмадинежадом, Дж. Парком и И. Чельцовым была получена классификация многообразий дель Пеццо степени 1 с 28 особыми точками. А именно, было установлено естественное взаимно-однозначное соответствие между множеством таких многообразий и множеством неособых плоских кривых степени 4. Более того, был получен явный способ построения многообразия V по кривой C. Он позволяет явно выписать уравнение V во взвешенном проективном пространстве $\mathbb{P}(1,1,1,2,3)$ в терминах ковариантов квартики C, задающих на двойственной проективной плоскости прямые, которые пересекают C в четверке точек с эквиангармоническим (соотвественно, гармоническим) двойным отношением.

Полученные конструкции были применены к изучению групп автоморфизмов многообразий дель Пеццо степени 1 с максимальным количеством изолированных особенностей и их вложений в группу Кремоны ранга 3. А именно, были классифицированы все группы G, действующие на многообразии V данного типа таким образом, что V является G-бирационально жестким. Как следствие, было впервые построен пример бесконечного числа попарно несопряженных вложений симметрической группы $\mathfrak{S}_4$ в группу Кремоны ранга 3, а также был построен новый пример вложения простой группы Клейна из 168 элементов в группу Кремоны ранга 3.

1.3. **Автоморфизмы взвешенных полных пересечений.** Известна классическая теорема Мацумуры–Монского, утверждающая, что неособая гиперповерхность степени больше 2 и размерности больше 2 в $\mathbb{P}^N$ имеет конечную группу автоморфизмов. Недавно эта теорема была обобщена О. Бенуа на случай полных пересечений. Вместе с В. Пржиялковским мы доказали аналог этой теоремы для неособых полных пересечений во взвешенных проективных пространствах.

1.4. **Взвешенные полные пересечения Фано большой коразмерности.** Известно, что коразмерность неособого многообразия Фано X, являющегося полным пересечением в $\mathbb{P}^N$ и не содержащегося в гиперплоскости, не превосходит размерности $\dim X$. Более того, если коразмерность равна $\dim X$, то X является полным пересечением $\dim X$ квадрик в $\mathbb{P}^N$, а если коразмерность равна $\dim X - 1$, то X является полным пересечением $\dim X - 2$ квадрик и одной кубики в $\mathbb{P}^N$. Вместе с В. Пржиялковским мы доказали, что это же утверждение верно для неособых полных пересечений во взвешенном проективном пространстве.

2. Работы

2.1. **Препринты.** Были написаны препринты:

(1) V. Przyjalkowski, C. Shramov, *Fano weighted complete intersections of large codimension*, arXiv:1906.11547
(2) C. Shramov, *Birational automorphisms of Severi-Brauer surfaces*, arXiv:1907.04364
(3) H. Ahmadinezhad, I. Cheltsov, J. Park, C. Shramov, *Double Veronese cones with 28 nodes*, arXiv:1910.10533

2.2. **Статьи.** Была написана и принята к печати статья:

В. В. Пржиялковский, К. А. Шрамов, *Автоморфизмы взвешенных полных пересечений*, Тр. МИАН, **307** (2019)

Вышли из печати ранее написанные статьи:

(1) I. Cheltsov, V. Przyjalkowski, C. Shramov, *Burkhardt quartic, Barth sextic, and the icosahedron*, Int. Math. Res. Not. IMRN, 2019:12 (2019), 3683–3703
(2) В. В. Пржиялковский, И. А. Чельцов, К. А. Шрамов, *Трехмерные многообразия Фано с бесконечными группами автоморфизмов*, Изв. РАН. Сер. матем., 83:4 (2019), 226–280
(3) I. Cheltsov, V. Przyjalkowski, C. Shramov, *Which quartic double solids are rational?*, J. Algebraic Geom., 28:2 (2019), 201–243
(4) V. Przyjalkowski, C. Shramov, *Nef partitions for codimension 2 weighted complete intersections*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci. (5), 19:3 (2019), 827–845

3. Участие в конференциях

В 2019 году я принимал участие в следующих мероприятиях:

(1) Конференция "Dynamics in Siberia", Новосибирск, 25 февраля – 2 марта 2019, доклад "Automorphism groups of Hopf and Kodaira surfaces".
(2) Kodaira Workshop, Лафборо, Великобритания, 15–16 марта 2019, доклад "Singular Veronese double cones".
(3) Конференция "Birational Geometry, Kahler–Einstein Metrics and Degenerations", Москва, 8–13 апреля 2019, доклад "K-stability of deformations of Mukai–Umemura threefold".
(4) Школа-конференция "Facets of Algebraic Geometry", Лахор, Пакистан, 17–19 апреля 2019, серия докладов "Algebraic varieties and their symmetries".
(5) Algebraic Geometry International Conference, Сеул, Южная Корея, 3–7 июня 2019, доклад "Automorphisms of Severi–Brauer surfaces".

(6) Конференция “Birational Geometry, Kahler–Einstein Metrics and Degenerations”, 10–14 июня 2019, Шанхай, Китай, 10–14 июня 2019, доклад “Finite groups acting on complex manifolds”.
(7) Конференция “Birational Geometry, Kahler–Einstein Metrics and Degenerations”, Поханг, Южная Корея, 18–22 ноября 2019, доклад “Automorphisms of elliptic surfaces”.

4. Организация конференций и семинаров

Я являюсь (совместно с Д. Орловым, Ю. Прохоровым и В. Пржиялковским) соруководителем семинара Исковских, проходящего в МИАН. Также являюсь (совместно с Д. Орловым и Ю. Прохоровым) соруководителем учебного семинара по алгебраической геометрии в научно-образовательном центре МИАН.

Принимал участие (совместно с Ю. Прохоровым) в организации двух школ-конференций по бирациональной геометрии в ВШЭ 25–29 марта и 28–30 октября 2019. Принимал участие (совместно с многими другими) в организации школы и конференции “Алгебра и геометрия” в ЯГПУ, Ярославль, 24–31 июля 2019.

5. Сравнение результатов за 2017–2019 с планами

5.1. **Успехи.** В целом наиболее важным направлением своей деятельности за последние три года я считаю изучение конечных групп бирациональных автоморфизмов алгебраических многообразий с точки зрения ограниченности их параметров. Эти вопросы мотивированы свойством Жордана, которое во многих ситуациях выполняется для групп бирациональных автоморфизмов. К этому направлению относятся две из написанных мной работ (которые я как раз считаю наиболее удачными за этот период): совместная с В. Вологодским работа об автоморфизмах геометрически рациональных поверхностей без точек над полем определения, и работа о константе Жордана для групп автоморфизмов поверхностей Севери–Брауэра. Буквально эти результаты не были предусмотрены в плане, но с тем, что планировалось, они непосредственно связаны.

5.2. **Задачи, потерявшие актуальность.** Я не получил результатов о свойстве Жордана для групп бирациональных диффеоморфизмов трехмерных вещественных многообразий. Как выяснилось, эта задача была недавно решена в намного большей общности Б. Циммерманном. Также я не получил новых результатов о p-подгруппах в группе Кремоны ранга 3, так как в этом направлении в то же время продвинулись (получив результаты, вероятно, по крайней мере для некоторых значений p близкие к оптимальным) А. Кузнецова и К. Логинов.

5.3. **Неудачи.** Мне не удалось продвинуться в изучении групп автоморфизмов квазипроективных многообразий с точки зрения свойства Жордана. Вероятно, даже в размерности 3 этот вопрос намного сложнее, чем я изначально предполагал. Также у меня не дошли руки до серьезного изучения особых многообразий Верры и двойных накрытий $\mathbb{P}^3$ с ветвлением в квартике.

5.4. **Незапланированные результаты.** Вопреки плану мне удалось (в совместных работах с разнообразными соавторами) доказать несколько интересных результатов о четырехмерном многообразии Кобла и применить их к вопросу о рациональности некоторых особых трехмерных квартик, полностью завершить изучение эквивариантной бирациональной жесткости проективного пространства $\mathbb{P}^3$ с действием конечной группы, построить новые примеры многообразий Фано типа V_{22} с метрикой Кэлера–Эйнштейна, классифицировать неособые трехмерных многообразия Фано с бесконечными группами автоморфизмов, обобщить теорему Мацумуры–Монского о конечности групп автоморфизмов на случай неособых взвешенных полных пересечений, классифицировать неособые взвешенные полные пересечения Фано большого индекса, продвинуться в изучении чисел Ходжа неособых взвешенных полных пересечений, а также построить nef-разбиения для неособых взвешенных полных пересечений коразмерности 2.